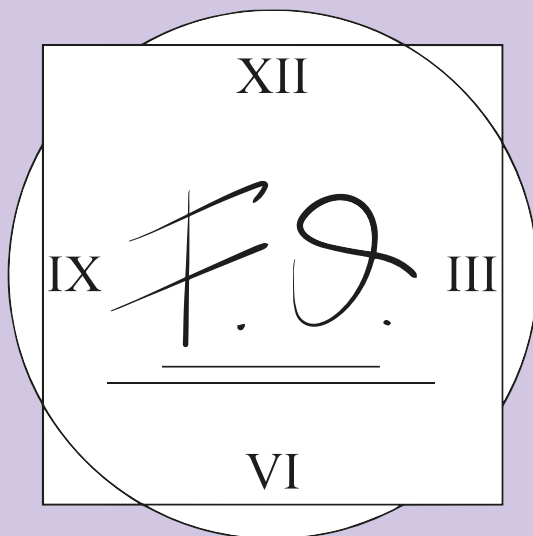


---

F. S. RARIO

---

Resoconti di una giornata di seminari  
3 Maggio 2024

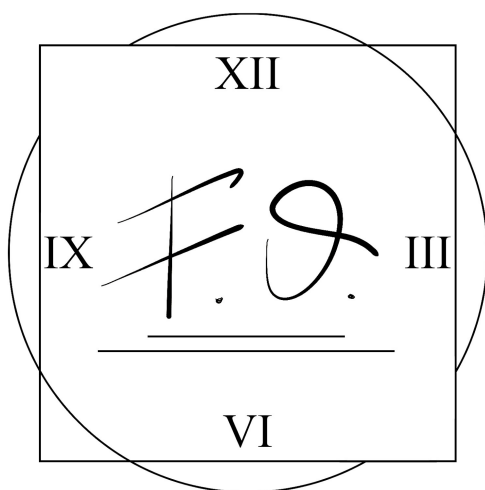




# FUORI ORARIO

Resoconti di una giornata di seminari

3 Maggio 2024



Fuori Orario  
Resoconti di una giornata di seminari

3 Maggio 2024  
Dipartimento di Matematica  
Università degli Studi di Milano

Versione definitiva: Settembre 2024

Impaginazione in  $\text{\LaTeX}$  a cura di Noemi Gennuso  
Progetto grafico di Riccardo Formenti



## INDICE

INTRODUZIONE	1
ANALISI... SUI P-ADICI? <i>Matteo Anoffo</i>	3
SUPER TRIS <i>Alice Chen e Ines Della Vedova</i>	11
SPAZI SPETTRALI: QUANDO I PUNTI SONO NUMERI PRIMI <i>Francesco Stoppa</i>	19
LA GEOMETRIA DEI COLORI <i>Elia Praderio</i>	25
SI PUÒ DAVVERO MESCOLORE IL CAFFÈ? <i>Francesco Pagliarin</i>	37
SULLA SOMMA DI QUATTRO QUADRATI <i>Noemi Gennuso</i>	43
IL PROBLEMA DI PLATEAU: BOLLE DI SAPONE E SUPERFICI MINIME <i>Alessandro Scapin</i>	47
CAMMINANDO SULLE MATRICI <i>Sara Donè e Dante Zampolini</i>	51
SPAZI DI FOCK: LA MATEMATICA DIETRO LA TEORIA QUANTISTICA DEI CAMPI <i>Mattia Belloni</i>	57
A PROPOSITO DEL COEFFICIENTE BINOMIALE <i>Marco Della Penna</i>	69



## INTRODUZIONE

Caro lettore o cara lettrice,  
prima di iniziare a sfogliare o leggere questo libretto, mi piacerebbe dirti due parole su questa iniziativa.

Tutto nasce dall'idea di uno studente che ha pensato di poter mettersi in gioco, insieme ad altri studenti, per approfondire alcuni aspetti della matematica e condividerli con chi potesse essere interessato.

Negli anni Fuori Orario diventa sempre più strutturata, fino ad arrivare ad oggi all'ottava edizione! Fa impressione vedere come passa il tempo: un anno fa scrivevo l'introduzione per il precedente libretto e quattro anni fa entravo a far parte dell'organizzazione, ma mi sembra ieri. . .

Forse ti chiederai chi sono io, e la risposta è che sono stata fino a pochi mesi fa una studentessa di matematica, come forse lo puoi essere anche te. Semplicemente in questi due anni ho coordinato l'organizzazione di Fuori Orario, con un grande aiuto di Francesco Pagliarin e mi piace l'idea che anche tu che leggi potresti interessarti a questa iniziativa, proprio come è successo casualmente a me. Considero queste brevi righe anche come il mio saluto all'università, all'edificio di via Saldini che mi ha regalato tanti bei momenti, oltre ad avermi confermato la passione per la matematica. Tra le belle esperienze ricordo proprio questa, insieme all'idea di Fuori Orario for High School: ritengo sia molto bello il fatto di poter vedere l'università non solo come un luogo in cui si danno esami, ma proprio in cui ci si possa dedicare a ciò che ci piace.

Mi auguro che tu veda il bello di questa giornata e l'importanza di portarla avanti. Io lascerò il testimone alle prossime generazioni, fiduciosa del fatto che Fuori Orario possa proseguire e avere seguito. Non invidio chi dovrà decidere il colore dei libretti dell'anno prossimo, vediamo se riusciremo a non ripeterli!

La giornata di quest'anno ha avuto successo, abbiamo avuto 12 seminari e 14 speakers: per il primo anno abbiamo sperimentato due seminari in coppia! Inoltre un'altra novità rispetto ai precedenti anni è stata quella di aver riottenuto la concessione di aule nel nostro dipartimento per tutta la giornata!

Fuori Orario ormai è consolidata come iniziativa, però è sempre fondamentale il contributo di alcuni studenti che rendono possibile concretamente la giornata. Vorrei quindi ringraziare tutti gli organizzatori: Francesco Pagliarin, Elisa Severgnini,

Riccardo Formenti, Eucantia Franzì, Sara Donè, Alessandro Scapin, Alice Chen, Carlo Chiarentin, Emanuele Accomazzi, Ines Della Vedova, Matteo Anoffo, Margherita Recchia e Noemi Gennuso. Ringrazio anche gli speaker e i professori che sostengono l'iniziativa.

Ora ho detto tutto, ti lascio iniziare questo libretto, sperando tu lo possa apprezzare ancora di più, sapendo anche che è il frutto di studenti appassionati e che si sono messi in gioco.

Buona lettura!

Elisa Pedrini

# ANALISI... SUI P-ADICI?

MATTEO ANOFFO

Dato un campo di numeri  $K$  è sempre possibile associargli un anello degli interi, ossia trovare un anello che sia per  $K$  un analogo di quello che è  $\mathbb{Z}$  per  $\mathbb{Q}$ . Purtroppo questo anello non sempre preserva la bellissima proprietà di essere a ideali principali. Non tutto è perduto però, vedremo infatti che la distanza di questi anelli dall'essere PID non è poi così grande.

## 1. Valutazioni

Iniziamo a richiamare alcune definizioni e teoremi.

DEFINIZIONE 1. Una *valutazione* su un campo  $k$  è una funzione definita su  $k$  a valori nei reali non negativi che soddisfa le tre seguenti proprietà:

- (1)  $|\alpha| = 0$  se e solo se  $\alpha = 0$
- (2)  $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$
- (3) Esiste una costante  $C$  tale che  $|1 + \alpha| \leq C$  per ogni  $|\alpha| \leq 1$

DEFINIZIONE 2. Una valutazione  $||$  si dice *non archimedea* se nella terza proprietà si ha  $C = 1$ , ossia

$$|\beta + \gamma| \leq \max\{|\beta|, |\gamma|\}$$

DEFINIZIONE 3. Sia  $||$  non archimedea. Chiamiamo *anello degli interi* l'anello degli elementi  $\alpha$  tali che  $|\alpha| \leq 1$ . Useremo la notazione  $\mathfrak{o}$ .

PROPOSIZIONE 4. L'insieme degli  $\alpha$  tali che  $|\alpha| < 1$  forma un ideale massimale in  $\mathfrak{o}$  che denoteremo con  $\mathfrak{p}$ .

PROPOSIZIONE 5. Se  $\text{char } k = p \neq 0$  ogni valutazione su  $k$  è non archimedea.

DEFINIZIONE 6. Su  $\mathbb{Q}$  possiamo definire le *valutazioni  $p$ -adiche* ( $p$  primo) ponendo

$$|p^a u/v|_p = p^{-a}$$

dove  $a, u, v \in \mathbb{Z}$  e  $p \nmid u, p \nmid v$ .

PROPOSIZIONE 7. L'insieme degli  $\varepsilon$  tali che  $|\varepsilon| = 1$  forma un gruppo, detto *gruppo delle unità*.

Studieremo il caso in cui il campo  $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$  ha un numero finito  $P$  di elementi. Supporremo, inoltre, che la valutazione sia discreta. Abbiamo quindi che  $\mathfrak{p} = (\pi)$  è un

ideale principale e ogni  $\alpha$  è della forma  $\alpha = \pi^v \varepsilon$  dove  $\varepsilon$  è un'unità. Chiameremo *ordine* di  $\alpha$ .

Da una valutazione si può indurre una metrica in modo ovvio. Possiamo quindi parlare di completamenti.

PROPOSIZIONE 8. *Si ha che  $\bar{\mathfrak{o}}/\bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{o}/\mathfrak{p}$  e  $\bar{\mathfrak{p}} = (\pi)$  come ideale di  $\bar{k}$ , dove  $\bar{k}$  è un completamento di  $k$  e  $\bar{\mathfrak{o}}$  e  $\bar{\mathfrak{p}}$  sono l'anello degli interi e il rispettivo ideale massimale di  $\bar{k}$ .*

LEMMA 9. *Se inoltre  $k$  è completo si ha che  $\bar{\mathfrak{o}}$  è formato dagli elementi della forma*

$$\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \pi^j$$

dove gli  $a_j$  sono un qualsiasi insieme di rappresentanti di  $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ .

TEOREMA 10. *Nelle condizioni del precedente lemma si ha che  $\mathfrak{o}$  è compatto.*

COROLLARIO 11.  *$k$  è localmente compatto.*

Denoteremo con  $k^+$  il gruppo topologico di  $k$  con la normale operazione di addizione e la topologia indotta da  $||$ .

DEFINIZIONE 12. Dato  $G$  gruppo topologico localmente compatto, definiamo *algebra di Borel* come l'algebra generata dai sottoinsiemi aperti di  $G$ .

DEFINIZIONE 13. Una misura  $\mu$  su un gruppo  $G$  si dice *invariante* se, per ogni  $a \in G$  e per ogni insieme di borel  $S$  si ha che

$$\mu(aS) = \mu(S)$$

LEMMA 14. *Esiste una misura invariante (misura di Haar) su  $k^+$  che risulta essere unica a meno di una costante moltiplicativa. Denotiamo questa misura con  $\mu$ .*

DEFINIZIONE 15. Sia  $k$  un campo con una valutazione discreta  $||$  e campo residuo con  $P < \infty$  elementi. Diremo che  $||$  è *normalizzata* se

$$|\pi| = P^{-1}$$

dove  $\mathfrak{p} = (\pi)$

TEOREMA 16. *Supponiamo inoltre che  $k$  sia completo rispetto alla valutazione normalizzata  $||$ . Allora*

$$\mu(\alpha + \beta\mathfrak{o}) = |\beta|$$

dove  $\mu$  è la misura di Haar su  $k^+$  normalizzata.

LEMMA 17.  *$k^+$  e  $k^\times$  sono totalmente disconnessi.*

Tratteremo ora l'estensione di valutazioni.

DEFINIZIONE 18. Siano  $k$  e  $K$  due campi con  $k \subset K$  e siano  $||, |||$  due valutazioni rispettivamente su  $k$  e  $K$ . Diciamo che  $|||$  estende  $||$  se  $|b| = ||b||$  per ogni  $b \in k$ .

PROPOSIZIONE 19. *Un'estensione finita di un campo  $k$  completo è completa rispetto alla valutazione estesa.*

TEOREMA 20. Sia  $K$  un'estensione separabile di  $k$  di grado  $N$ . Allora esistono al più  $N$  estensioni della valutazione di  $k$  a  $K$ , siano esse  $|||_j$  ( $1 \leq j \leq J$ ). Siano  $\bar{k}, K_j$  i rispettivi completamenti di  $k$  e  $K$ . Allora

$$\bar{k} \otimes_k K = \bigoplus_{1 \leq j \leq J} K_j$$

algebricamente e topologicamente.

DEFINIZIONE 21. Sia  $k$  un campo. Diciamo che  $k$  è un campo globale se è un'estensione finita di  $\mathbb{Q}$  oppure se è un'estensione separabile finita di  $\mathbb{F}(t)$ , dove  $t$  è trascendente su  $\mathbb{F}$ .

Noi ci concentreremo esclusivamente sul primo caso.

LEMMA 22. Sia  $\alpha \neq 0$  un elemento del campo globale  $k$ . Allora esiste solo un numero finito di valutazioni non equivalenti su  $k$  tali che  $|\alpha| > 1$ .

*Dimostrazione.* Sappiamo già essere vero per  $\mathbb{Q}$ . Per un'estensione finita di  $\mathbb{Q}$  sappiamo che

$$|\alpha|^n = | -a_1\alpha^{n-1} - \dots - a_n | \leq \max\{1, |\alpha|^{n-1}\} \max\{|a_1|, \dots, |a_n|\}$$

dove  $a_1, \dots, a_n$  sono i coefficienti del polinomio minimo di  $\alpha$ , da cui

$$|\alpha| \leq \max\{1, |a_1|, \dots, |a_n|\}$$

La tesi segue quindi dal fatto che ogni valutazione su  $\mathbb{Q}$  ammette un numero finito di estensioni a  $k$ . □

TEOREMA 23. Sia  $\alpha \neq 0$  un elemento del campo globale  $k$ . Siano  $||_v$  le valutazioni normalizzate di  $k$ . Allora  $|\alpha|_v = 1$  per quasi ogni  $v$ , ossia per tutte tranne un numero finito, e si ha

$$\prod_v |\alpha|_v = 1$$

*Dimostrazione.* Dai risultati precedenti è sufficiente dimostrare l'asserzione solo per  $\mathbb{Q}$ . Ma in questo caso è ovvio, poiché la valutazione assoluta annulla tutte le valutazioni non archimedee. □

LEMMA 24. Sia  $\omega_1, \dots, \omega_N$  una base di  $K/k$ . Allora per quasi ogni valutazione normalizzata  $v$  si ha che

$$\omega_1 v \oplus \dots \oplus \omega_N v = \mathfrak{D}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{D}_J$$

dove  $N = [K : k]$ ,  $v = v_v$  è l'anello degli interi di  $k$  per  $||_v$  e  $\mathfrak{D}_j$  è l'anello degli interi di  $K_j$  per  $||_{V_j}$ , dove  $K_j$  è il completamento di  $K$  rispetto alla valutazione  $||_{V_j}$ .

## 2. L'anello degli adeli e il gruppo degli idele

DEFINIZIONE 25. Sia  $\{\Omega_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  una famiglia di spazi topologici e per quasi ogni  $\lambda$  sia  $\Theta_\lambda$  un aperto di  $\Omega_\lambda$ . Consideriamo lo spazio  $\Omega$  degli  $\alpha = (\alpha_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  dove  $\alpha_\lambda \in \Omega_\lambda$  e  $\alpha_\lambda \in \Theta_\lambda$  per quasi ogni  $\lambda$ . Su  $\Omega$  consideriamo quindi la topologia data dalla base  $\{\prod \Gamma_\lambda\}$  dove  $\Gamma_\lambda \subset \Omega_\lambda$  è un aperto e, per quasi ogni  $\lambda$ ,  $\Gamma_\lambda = \Theta_\lambda$ . Con questa topologia  $\Omega$  è detto *prodotto topologico ristretto* degli  $\Omega_\lambda$ .

OSSERVAZIONE 26. Sia  $S$  un sottoinsieme finito di  $\Gamma$  e sia

$$\Omega_S = \prod_{\lambda \in S} \Omega_\lambda \prod_{\lambda \notin S} \Theta_\lambda \quad (1)$$

Allora  $\Omega_S$  è aperto in  $\Omega$  e la topologia indotta come sottospazio è la stessa della topologia prodotto.

LEMMA 27. Siano  $\Theta'_\lambda \subset \Omega_\lambda$  aperti definiti per quasi ogni  $\lambda$  e tali che  $\Theta_\lambda = \Theta'_\lambda$  per quasi ogni  $\lambda$ . Allora il prodotto ristretto rispetto ai  $\Theta'_\lambda$  è uguale al prodotto ristretto rispetto ai  $\Theta_\lambda$ .

LEMMA 28. Supponiamo che gli  $\Omega_\lambda$  siano localmente compatti e che gli aperti  $\Theta_\lambda$  siano compatti. Allora  $\Omega$  è localmente compatto.

*Dimostrazione.* Ogni  $\Omega_S$  è localmente compatto da (1) poiché  $S$  è finito. Inoltre  $\Omega = \cup \Omega_S$  e gli  $\Omega_S$  sono aperti, da cui la tesi.  $\square$

DEFINIZIONE 29. Supponiamo che per ogni  $\lambda$  per cui sia definito  $\theta_\lambda$  si abbia una misura  $\mu_\lambda$  per cui si abbia  $\mu_\lambda(\Theta_\lambda) = 1$ . Definiamo la misura prodotto  $\mu$  su  $\Omega$  ponendo come base di insieme misurabili i

$$\prod_{\lambda} M_\lambda$$

dove i  $M_\lambda$  hanno misura finita e  $M_\lambda = \Theta_\lambda$  per quasi ogni  $\lambda$  e poniamo quindi

$$\mu\left(\prod_{\lambda} M_\lambda\right) = \prod_{\lambda} \mu_\lambda(M_\lambda)$$

Sia  $k$  campo e per ogni valutazione normalizzata  $\|\cdot\|_v$  denotiamo con  $k_v$  il completamento di  $k$  rispetto a quella valutazione. Denotiamo con  $\mathfrak{o}_v$  l'anello degli interi rispetto a ogni  $\|\cdot\|_v$  non archimedea.

DEFINIZIONE 30. Chiamiamo *anello degli Adele* di  $k$  l'anello topologico  $V_k$  ottenuto tramite il prodotto topologico ristretto dei  $k_v$  rispetto ai  $\mathfrak{o}_v$  con addizione e moltiplicazione definita componente per componente.

OSSERVAZIONE 31.  $V_k$  è localmente compatto grazie a (2.4).

OSSERVAZIONE 32. La mappa diagonale è una naturale immersione di  $k$  in  $V_k$ , chiamiamo anello degli *adele principali* gli elementi di  $k$  sotto l'immagine di questa immersione.

LEMMA 33. Sia  $K$  un'estensione finita separabile di un campo globale  $k$ . Allora

$$V_k \otimes_k K = V_K \quad (2)$$

*algebricamente e topologicamente.*

*Dimostrazione.* Sia  $\omega_1, \dots, \omega_N$  una base per  $K/k$ . Si ha che LHS di (2) è il prodotto topologico ristretto dei

$$k_v \otimes_k K = k_v \omega_1 \oplus \dots \oplus k_v \omega_N \quad (3)$$

rispetto ai

$$\mathfrak{o}_v \omega_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{o}_v \omega_N \quad (4)$$



Ma ora (3), grazie a (1.43), è

$$K_{V_1} \oplus \dots \oplus K_{V_j} \quad (5)$$

dove  $V_1 \dots V_j$  sono le estensioni normalizzate di  $v$  a  $K$ . Inoltre, grazie a (1.50), l'identificazione di (3) con (5) identifica (4) con

$$\mathfrak{D}_{V_1} \oplus \dots \oplus \mathfrak{D}_{V_j} \quad (6)$$

per quasi ogni  $v$ . Abbiamo quindi che LHS di (2) è il prodotto topologico ristretto di (3) rispetto ai (4), che coincide con il prodotto ristretto dei  $K_V$  rispetto ai  $\mathfrak{D}_V$ , che coincide con RHS di (2).  $\square$

**COROLLARIO 34.** Sia  $V_k^+$  il gruppo additivo di  $V_k$ . Allora

$$V_K^+ = V_k^+ \oplus \dots \oplus V_k^+$$

con  $N$  addendi, dove  $N=[K:k]$ .

*Dimostrazione.*  $\omega V_k^+$  è isomorfo a  $V_k^+$  come gruppo topologico per ogni  $\omega \neq 0$ . Abbiamo quindi

$$V_K^+ = V_k^+ \otimes_k K = \omega_1 V_k^+ \oplus \dots \oplus \omega_N V_k^+ = V_k^+ \oplus \dots \oplus V_k^+$$

$\square$

**TEOREMA 35.**  $k$  è discreto in  $V_k$  e  $V_k^+/k^+$  è compatto.

*Dimostrazione.* Dal precedente corollario è sufficiente dimostrare l'asserzione per  $\mathbb{Q}$  nel nostro caso. Per dimostrare che  $\mathbb{Q}^+$  è discreto in  $V_{\mathbb{Q}}^+$  è sufficiente, grazie alla struttura di gruppo, trovare un intorno  $U$  di 0 che non contenga altri elementi di  $k^+$ . Consideriamo quindi per  $U$  l'insieme degli  $\alpha = \{\alpha_v\} \in V_{\mathbb{Q}}^+$  tali che

$$|\alpha_{\infty}|_{\infty} < 1$$

$$|\alpha_p|_p \leq 1$$

Se  $b \in \mathbb{Q} \cap U$  allora  $b \in \mathbb{Z}$  per le valutazioni  $p$ -adiche, da cui  $b = 0$  per la valutazione assoluta.

Sia ora  $W \subset V_{\mathbb{Q}}^+$  l'insieme degli elementi tali che

$$|\alpha_{\infty}|_{\infty} \leq \frac{1}{2}$$

$$|\alpha_p|_p \leq 1$$

Mostriamo ora che ogni adele  $\beta$  è della forma

$$\beta = b + \alpha \quad (7)$$

Per ogni  $p$  possiamo trovare un

$$r_p = z_p / p^{x_p}$$

con  $z_p \in \mathbb{Z}$ ,  $x_p \in \mathbb{Z}$  e  $x_p \geq 0$  tale che

$$|\beta_p - r_p|_p \leq 1$$

e poiché  $\alpha$  è un adele possiamo prendere

$$r_p = 0$$

per quasi ogni  $p$ . Quindi possiamo definire  $r = \sum_p r_p$  e abbiamo

$$|\beta_p - r| \leq 1$$

per ogni  $p$ . Scegliamo ora  $s \in \mathbb{Z}$  tale che

$$|\beta_\infty - r - s| \leq \frac{1}{2}$$

Abbiamo quindi  $b = r + s$  e  $\beta = \alpha - b$  è l'adele cercato.

Abbiamo quindi che la mappa continua  $W \rightarrow V_{\mathbb{Q}}^+/\mathbb{Q}^+$  indotta dalla mappa  $V_{\mathbb{Q}}^+ \rightarrow V_{\mathbb{Q}}^+/\mathbb{Q}^+$  è suriettiva. Ma  $W$  è compatto e quindi  $V_{\mathbb{Q}}^+/\mathbb{Q}^+$  è compatto.  $\square$

**COROLLARIO 36.**  $V_k$  ha un sottoinsieme  $W$  definito da disuguaglianze del tipo  $|\xi_v|_v \leq \delta_v$ , dove  $\delta_v = 1$  per quasi ogni  $v$ , tale che ogni  $\varphi \in V_k$  ammette una scrittura

$$\varphi = \theta + \gamma$$

con  $\theta \in W$  e  $\gamma \in k$ .

*Dimostrazione.* Basta prendere il  $W$  della dimostrazione precedente.  $\square$

**COROLLARIO 37.**  $V_k^+/k^+$  ha misura finita nella misura quoziente indotta dalla misura di Haar su  $V_k^+$ .

**LEMMA 38.** Per ogni  $k$  campo globale esiste una costante  $C > 0$  tale che:

Sia  $\alpha = \{\alpha_v\} \in V_k^+$  tale che

$$\prod_v |\alpha_v|_v > C \tag{8}$$

Allora esiste un adede principale non banale  $\beta \in k$  tale che

$$|\beta|_v \leq |\alpha_v|_v$$

per ogni  $v$ .

**COROLLARIO 39.** Sia  $v_0$  una valutazione normalizzata e sia dato  $\delta_v > 0$  per ogni  $v \neq v_0$  e  $\delta_v = 1$  per quasi ogni  $v$ . Allora esiste un  $\beta \in k$  non banale tale che

$$|\beta_v|_v \leq \delta_v$$

per ogni  $v \neq v_0$ .

Sia  $R$  un anello e consideriamo il gruppo moltiplicativo  $R^\times$ . Dotiamo  $R^\times$  della topologia data dall'immersione in  $R \times R$  data dalla mappa  $x \rightarrow (x, x^{-1})$ . Con questa topologia  $R^\times$  è un gruppo topologico e l'immersione in  $R$  è continua.

**DEFINIZIONE 40.** Chiamiamo *gruppo degli idele*  $J_k$  di  $k$  il gruppo degli elementi invertibili di  $V_k$  dotato della topologia appena definita.

**OSSERVAZIONE 41.**  $k^\times$  si immerge naturalmente in  $J_k$  e chiameremo i suoi elementi *idele principali*.

**LEMMA 42.**  $k^\times$  è un sottogruppo discreto di  $J_k$ .

*Dimostrazione.*  $k$  è discreto in  $V_k$  e quindi  $k^\times$  si immerge in  $V_k \times V_k$  come sottogruppo discreto.  $\square$

LEMMA 43.  $J_k$  è il prodotto topologico ristretto dei  $k_v^\times$  rispetto alle unità  $U_v \subset k_v$ .

DEFINIZIONE 44. Per  $\alpha = \{\alpha_v\} \in J_k$ , definiamo il contenuto di  $\alpha$  come la quantità  $c(\alpha) = \prod_v |\alpha_v|_v$ .

LEMMA 45. La mappa  $\alpha \rightarrow c(\alpha)$  è un morfismo continuo da  $J_k$  nel gruppo moltiplicativo  $(\mathbb{R}^+)^\times$ .

Denotiamo con  $J_k^1$  il kernel della mappa  $\alpha \rightarrow c(\alpha)$ .

LEMMA 46.  $J_k^1$  visto come sottospazio di  $V_k$  è chiuso e la topologia coincide con quella indotta vedendolo come sottospazio di  $J_k$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\alpha \in V_k$ ,  $\alpha \notin J_k^1$  e studiamo separatamente i casi  $\prod_v |\alpha_v|_v < 1$  e  $\prod_v |\alpha_v|_v > 1$ . Vogliamo trovare un aperto  $W$  contenente  $\alpha$  disgiunto da  $J_k^1$ . Nel primo caso esiste un insieme finito  $S$  tale che: (i)  $S$  contiene tutti i posti  $v$  tali che  $|\alpha_v|_v > 1$  e (ii)  $\prod_{v \in S} |\alpha_v|_v > 1$ . Allora l'insieme dato dai  $\xi$  tali che

$$\begin{aligned} |\xi_v - \alpha_v|_v &< \varepsilon \\ |\xi_v|_v &\leq 1 \end{aligned}$$

rispettivamente per  $v \in S$  e  $v \notin S$ , per  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo, è un aperto adatto. Nel secondo caso esiste un insieme finito  $S$  di posti  $v$  tale che: (i)  $S$  contiene tutti i posti  $v$  tali che  $|\alpha_v|_v > 1$  e (ii) se  $v \notin S$  allora  $|\xi_v|_v < 1$  implica  $|\xi_v|_v < \frac{1}{2}C$ . Possiamo scegliere  $\varepsilon$  tale che  $|\xi_v - \alpha_v|_v < \varepsilon$  ( $v \in S$ ) implica  $1 < \prod_{v \in S} |\xi_v|_v < 2C$ . Possiamo allora definire  $W$  da

$$\begin{aligned} |\xi_v - \alpha_v|_v &< \varepsilon \\ |\xi_v|_v &\leq 1 \end{aligned}$$

rispettivamente per  $v \in S$  e  $v \notin S$ .

Dimostriamo ora che le topologie indotte sono equivalenti. Per ogni  $\alpha \in J_k^1$  dobbiamo mostrare che ogni  $J_k$ -intorno contiene un  $V_k$ -intorno e viceversa.

Sia  $W \subset J_k^1$  un  $V_k$ -intorno di  $\alpha$ .  $W$  contiene un  $V_k$ -intorno del tipo

$$\begin{aligned} |\xi_v - \alpha_v|_v &< \varepsilon \\ |\xi_v|_v &\leq 1 \end{aligned} \tag{9}$$

rispettivamente per  $v \in S$  e  $v \notin S$ , dove  $S$  è un insieme finito di  $v$ . Questo contiene un  $J_k$ -intorno dove  $\leq$  di (10) è sostituito con  $=$ .

Sia ora  $H \subset J_k^1$  un  $J_k$ -intorno. Allora contiene un  $J_k$ -intorno del tipo

$$\begin{aligned} |\xi_v - \alpha_v|_v &< \varepsilon \\ |\xi_v|_v &\leq 1 \end{aligned} \tag{10}$$

rispettivamente per  $v \in S$  e  $v \notin S$ , dove  $S$  è finito e contiene, almeno, tutte le valutazioni archimedee  $v$  e tutte le valutazioni  $v$  con  $|\alpha_v|_v \neq 1$ . Poiché  $\prod |\alpha_v|_v = 1$  possiamo supporre  $\varepsilon$  in (11) sufficientemente piccolo perché si abbia

$$\prod_v |\xi_v|_v < 2$$

Allora l'intersezione di  $J_k^1$  con l'intorno definito da (11) è uguale a intersecarlo con l'intorno definito da (10).  $\square$

TEOREMA 47.  $J_k^1/k^\times$  è compatto (con la topologia quoziente).

*Dimostrazione.* Dal precedente lemma è sufficiente trovare un insieme  $V_k$ -compatto  $W \subset V_k$  tale che la mappa  $W \cup J_k^1 \rightarrow J_k^1/k^\times$  è suriettiva. Consideriamo come  $W$  l'insieme degli  $\xi = \{\xi_v\}$  con

$$|\xi_v|_v \leq |\alpha_v|_v$$

con  $\alpha_0\{\alpha_v\}$  è un qualsiasi idele di contenuto maggiore del  $C$  definito dal lemma (2.14). Sia ora  $\beta_0\{\beta_v\} \in J_k^1$ . Allora sempre dallo stesso lemma esiste un  $\eta \in k^\times$  tale che

$$|\eta|_v \leq |\beta_v^{-1}\alpha_v|$$

per ogni  $v$ . Allora  $\eta\beta \in W$  è l'elemento cercato.  $\square$

DEFINIZIONE 48. Sia  $k$  un'estensione finita di  $\mathbb{Q}$ . Definiamo il gruppo ideale  $I_k$  di  $k$  come il gruppo abeliano libero sull'insieme delle valutazioni non archimedee  $v$  di  $k$ . Chiameremo *ideale* un elemento di  $I_k$  e lo chiameremo *integrale* se ogni coefficiente è non negativo.

OSSERVAZIONE 49. Esiste un'immersione naturale continua  $J_k \rightarrow I_k$  del gruppo degli idele nel gruppo ideale, visto con la topologia discreta, data da  $\alpha = \{\alpha_v\} \rightarrow \sum(\text{ord}_v \alpha)v$ . L'immagine degli idele principali è il gruppo degli ideali principali.

TEOREMA 50. Il gruppo delle classi di ideali, i.e. il quoziente di  $I_k$  per gli ideali principali, è finito.

*Dimostrazione.* La mappa  $J_k^1 \rightarrow I_k$  è suriettiva, da cui il gruppo delle classi è l'immagine del gruppo compatto  $J_k^1/k^\times$ , quindi è compatto. Poiché è anche discreto, segue che è finito.  $\square$

Per la scrittura di questo seminario è stato utilizzato il seguente:

- Cassels-Frolich "Algebraic Number Theory"

# SUPER TRIS

ALICE CHEN E INES DELLA VEDOVA

## 1. Regole del gioco

Il Super Tris si gioca su una griglia da tris dove in ogni casella, detta campo, è contenuta a sua volta una griglia da tris. Lo scopo del gioco è ottenere tre campi allineati; ogni campo viene ottenuto vincendo la partita di tris contenuta in esso. Identificheremo ogni casella come  $(a, b)$ , dove  $a$  è il numero del campo e  $b$  il numero della casella, con  $a, b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ .

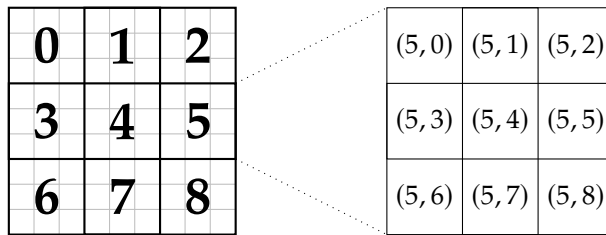


FIGURA 1. Tabellone di gioco (a sinistra) e ingrandimento sul campo 5 (a destra) Fonte: [2].

Inoltre ogni mossa determina dove giocherà l'avversario: la casella nel campo in cui un giocatore mette il proprio simbolo corrisponde al campo in cui l'altro giocatore dovrà giocare.

Quando un campo viene vinto, non ci si può più giocare e diventa un campo jolly: d'ora in poi se un giocatore dovesse giocare in quel campo potrà giocare nel campo che vuole.

## 2. Cenni di TdG

**DEFINIZIONE 1 (TdG).** La Teoria dei Giochi è una disciplina che studia modelli matematici di interazione strategica tra agenti razionali.

La teoria dei giochi ha applicazioni in vari campi delle scienze sociali, della logica, teoria dei sistemi e nell'informatica.

Viene spesso impiegata in Economia poiché è un buon modello nella rappresentazione delle interazioni strategiche fra i vari agenti.

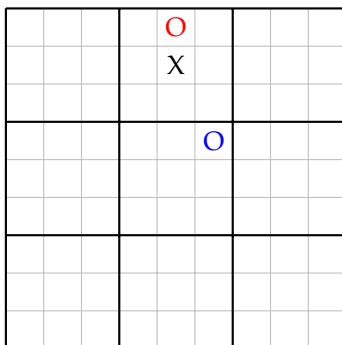


FIGURA 2. Dopo la mossa nera, la mossa blu è accettabile, quella rossa no.

DEFINIZIONE 2 (Interazione strategica). Si parla di interazione strategica quando due giocatori (agenti decisionali) sono influenzati l'un l'altro dalle dall'esito delle proprie e dalle scelte altrui.

Ad esempio il solitario non è un gioco ad interazione strategica.

DEFINIZIONE 3 (Albero di gioco). L'albero di gioco è un grafo utile alla rappresentazione di un gioco a *interazione strategica*.

I **nodi** identificano gli stadi del gioco, mentre gli archi mostrano le possibilità di gioco.

La ramificazione diverge dall'alto verso il basso, dalla radice verso le foglie (da qui l'assimilazione con del grafo con l'albero). A ogni nodo ne precede e ne segue uno tranne che per i terminali dove vengono indicati gli esiti dei vari percorsi.

Questo tipo di rappresentazione è particolarmente indicata per schematizzare le fasi dei **giochi sequenziali**, ovvero dove i due agenti giocano a turni, infatti consente di visualizzare tutte le successioni logiche e le possibili combinazioni strategiche.

DEFINIZIONE 4 (Funzione di valutazione). La funzione di valutazione permette di avere una stima dell'utilità attesa a partire da una particolare posizione di gioco.

La funzione  $f$  deve essere efficiente da calcolare e riflettere le probabilità di vittoria, si può pensare di affibbiare valori diversi a mosse che possano portare alla vittoria più o meno strategicamente, ad esempio nel gioco degli scacchi si considerano alcune caratteristiche più di altre, come il valore del pezzo giocato (che sia un pedone o un alfiere).

In base alle caratteristiche dell'ambiente la funzione  $f$  stima il valore atteso di ciascuna mossa successiva, in tempi rapidi, per poter intraprendere il percorso migliore; possiamo quindi tagliare l'albero decisionale e analizzare solo i primi nodi successivi a quello corrente.

$f$  generalmente è una funzione euristica.

Una funzione è efficace soltanto se è in grado di prevedere gli stati finali dello schema con un margine di errore ridotto.

DEFINIZIONE 5. Il Super Tris è **gioco a somma zero**, ossia dove ogni vincita è bilanciata con una perdita uguale (solo uno dei due giocatori vince, e l'altro perde).

È anche **un gioco a informazione perfetta**, cioè dove tutti i giocatori sanno tutto quello che sta succedendo nel gioco.

### 3. Algoritmo minimax

L'algoritmo minimax è un esempio di algoritmo ricorsivo che permette di studiare in profondità un albero di gioco.

Minimax viene usato per la ricerca della mossa migliore (dunque della strategia ottimale) in un gioco a somma zero, in uno scenario di interazione strategica, dove si ha che ambo i concorrenti siano **agenti razionali**.

Di per sè l'algoritmo propone la minimizzazione delle perdite massime rispettive dei due giocatori, evitando strade che possano portare alla vittoria di uno dei due.

- (1) Nello schema di gioco abbiamo i due partecipanti: MINI e MAX. MINI tende a scegliere percorsi che minimizzino la sua perdita, MAX, al contrario, percorsi che massimizzino la sua vittoria. A partire dalla radice esiste un solo percorso che possa portare al raggiungimento di ognuno dei vari nodi terminali.
- (2) L'analisi parte dai nodi terminali, all'interno dei quali troviamo dei valori numerici. Ogni gruppo di nodi-figlio farà riferimento a un **nodo madre** che assumerà un valore a seconda sia il turno di MINI o MAX.
- (3) A partire dallo stadio finale, per ogni gruppo di valori che fanno riferimento allo stesso nodo madre, MINI sceglierà il minore fra essi, e lo eleverà al nodo madre, in modo da minimizzare la sua perdita.
- (4) Allo stesso modo MAX sceglierà fra i nodi-figli quello col valore maggiore e lo assegnerà al nodo-madre, così da evitare la vittoria di MINI.
- (5) La sequenza continua in questo modo fino a giungere la radice/lo stadio corrente del gioco, si avrà dunque la ricostruzione dell'albero.
- (6) Partendo dunque dall'alto, ripercorrendo l'albero al contrario (ovvero dalla radice), potremmo dunque ritrovare il percorso ottimale, ovvero quello che minimizzi la perdita di ambo le parti.

Lo schema può funzionare soltanto quando vi è un numero finito di stati, altrimenti si va incontro alla **complessità temporale**, ovvero l'esecuzione dell'algoritmo rischia di non terminare mai.

Quando l'albero ha un'estensione piuttosto importante vengono introdotti dei metodi di **potatura**, che permettano di "recidere" porzioni dell'albero, in modo tale da ridurre le ramificazioni da analizzare, eliminando percorsi che conducono allo stesso risultato.

Minimax è applicabile a giochi a due agenti, l'aumento dei partecipanti nello schema complica di non poco l'analisi a causa dei molteplici scenari che possono presentarsi con l'entrata in scena di un altro giocatore.

Per la sua natura il gioco del Super Tris presenta un albero discretamente esteso e risulta abbastanza faticoso analizzarne i nodi.

#### 4. Metodi di potatura

Per alleggerire il carico dell'algoritmo nell'analisi dell'albero di gioco in modo opportuno, vengono sfruttati alcuni **metodi di portatura**: discuteremo principalmente di due fra essi: il metodo della **tabella delle trasposizioni** e la **potatura alpha-beta**.

La **tabella delle trasposizioni** permette di eliminare i percorsi dell'albero che portano ad uno stesso stato, in tal modo l'algoritmo evita di dover analizzare stati ripetuti, diminuendo i tempi di ricerca, una volta definito uno stato come fallimentare, viene applicato un taglio a tutti i percorsi che conducono allo stesso risultato.

La **potatura alpha beta** è invece una tipologia fra le **potature logiche**. L'idea alla sua base è l'interruzione dell'esplorazione dell'albero di gioco una volta stabilito che le altre strade portino ad un risultato peggiore.

Nelle due variabili alpha e beta vengono salvati rispettivamente il valore massimo e il minimo a risalire da un nodo foglia, in questo modo viene interrotta automaticamente nell'algoritmo l'esplorazione di quei nodi che presentano scelte che per la razionalità dei due giocatori, non verranno effettuate.

Bisogna però sottolineare l'inefficienza di questo metodo nel caso l'ordine dei nodi-foglia sia tale per cui diventi necessario analizzare tutto lo schema di gioco, infatti si può avere una tale casistica per la quale non ci sia nessun ramo da "potare", indi per cui non ci sarà nessuna semplificazione nell'analisi del gioco.

Inoltre in uno dei percorsi potati potremmo ritrovare anche quello vincente per uno dei giocatori, il che però sarebbe frutto di un gioco non ottimale da parte di uno dei partecipanti. Dato che assumiamo che nell'algoritmo entrambi siano però razionali, a priori non si sarebbe giunto a tale risultato.

#### 5. Ricerca di Montecarlo su alberi

Il metodo minimax si adatta bene ad alberi di gioco relativamente piccoli e a giochi dove è facile definire una funzione euristica di valutazione. Il Super Tris non è tra questi: sapreste dire per esempio chi è in vantaggio nella partita in Figura 3? È in vantaggio chi ha più campi, o chi ha due campi già allineati?

Per indagare l'albero di gioco del Super Tris al metodo minimax si preferisce quindi un altro metodo, detto **ricerca di Monte Carlo su alberi** (nota anche come *Monte Carlo tree search*, abbreviata con MCTS).

La **ricerca di Monte Carlo pura** fa simulazioni casuali a ogni stadio del gioco, e sceglie il nodo che ha portato a più vittorie nelle simulazioni. Questo metodo è adatto ai giochi dove il caso gioca un ruolo importante, ma in un gioco deterministico come il Super Tris è meno efficace.

Consideriamo per esempio la situazione in Figura 4: un giocatore intelligente potrebbe fare la mossa in blu, che cedrebbe un campo al suo avversario ma gli permetterebbe di guadagnare un altro campo. Per la ricerca di Monte Carlo pura però questa mossa è svantaggiosa perchè nell'immediato fa perdere una casella.

Per il Super Tris è quindi più efficace la **ricerca di Monte Carlo su alberi** [1], che memorizza i risultati ottenuti nelle simulazioni precedenti in un albero. La ricerca di Monte Carlo su alberi ha quattro fasi (Figura 5):



				O			O	X	
				X			O	O	
	X				X			O	
O	X			X	O	X	X	X	
	X			O	O	O			
						X			
						X	O	O	O
X	O				O	X			X

FIGURA 3. Chi è in vantaggio in questa partita: la croce, che ha più campi, o il cerchio, che ha già due campi allineati?

O								
X								
			O					
X								
O				X				
				O	O	O		
							X	
				X			X	
				X	O		O	X

FIGURA 4. Dopo la mossa marrone, la mossa più intelligente per il cerchio è quella blu, che fa vincere un campo alla croce (mossa rossa) ma poi fa vincere un campo anche al cerchio (mossa rosso chiaro).

- (1) **Selezione:** le mosse iniziali vengono scelte nell'albero già conosciuto fino ad arrivare ad una foglia.
- (2) **Espansione:** una volta selezionata una foglia, si espande il nodo scegliendo una mossa casuale per creare un nodo figlio.
- (3) **Simulazione:** dal nodo creato si avvia una simulazione del gioco fino alla fine.
- (4) **Backpropagation:** il risultato della simulazione viene usato per aggiornare la probabilità di vittoria associata al nodo e ai nodi genitori.

Nella fase di esplorazione ci sono due fattori da bilanciare: l'*exploitation* (scegliere la mossa più vantaggiosa sul momento) è l'*exploration* (esplorare più parti dell'albero).

Si consideri l'esempio in Figura 6: la mossa rossa fa vincere un campo, cosa vantaggiosa nell'immediato, ma che porterebbe il cerchio a vincere un altro campo. La mossa blu sposta invece il cerchio in un nuovo campo, il che non è immediatamente vantaggioso per la croce ma ostacola la vittoria del cerchio.

Per bilanciare *exploitation* ed *exploration* si calcola la formula dell'*upper confidence bound on trees*, anche noto come UCT, che prevede di scegliere il nodo con il valore più

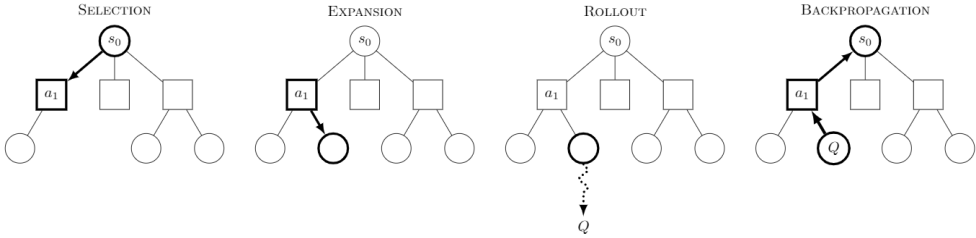


FIGURA 5. Le quattro fasi della MCTS. Fonte: Robert Moss - Own work, CC BY-SA 4.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=111182752>

O					
X					
	O				
X					
O		X			
		O	O		
				X	
		X			X
		X	O	X	O

FIGURA 6. Dopo la mossa marrone, la mossa rossa privilegia l'exploitation, quella blu privilegia l'exploration.

alto di

$$\frac{w_i}{n_i} + c_i \cdot \sqrt{\frac{\log(N_i)}{n_i}}$$

dove  $w_i$  è il numero di vittorie associate al nodo dopo la  $i$ -esima mossa,  $n_i$  il numero di simulazioni per il nodo dopo la  $i$ -esima mossa,  $N_i$  è il numero di simulazioni dopo la  $i$ -esima mossa associate al nodo genitore, e  $c_i$  è un coefficiente scelto empiricamente; nel caso del Super Tris, è stato mostrato che il coefficiente  $c$  che garantisce le maggiori probabilità di vittoria è  $\sqrt{2}$  [2].  $\frac{w_i}{n_i}$  rappresenta l'exploitation (dà un valore più alto ai nodi con un numero di vittorie più alto nelle simulazioni), mentre  $c_i \cdot \sqrt{\frac{\log(N_i)}{n_i}}$  rappresenta l'exploration.

## 6. Variante con strategia vincente

Come abbiamo visto, il Super Tris è un gioco complesso per il quale è molto difficile trovare una strategia vincente. Esiste però una variante del gioco per la quale è stato dimostrata una strategia vincente: in questa variante si può continuare a giocare nei campi già vinti e solo quando un campo è completamente occupato diventa jolly.

Un articolo del 2020 ([2]) ha dimostrato che con il metodo che esporremo è garantita la vittoria del primo giocatore con un numero di mosse compreso tra 29 e 43. Il metodo si compone di tre fasi: *apertura*, *sviluppo* e *conclusione*.

### 6.1. Apertura

Il primo giocatore, la croce, inizia giocando in  $(4,4)$ . A quel punto il secondo giocatore, il cerchio, è costretto a giocare in una casella del campo 4, che chiameremo  $(4,j)$ ; allora la croce gioca in  $(j,4)$ , costringendo il cerchio a occupare tutte le altre caselle del campo 4.

Si osserva che la fase di apertura dura 16 mosse.

### 6.2. Sviluppo

Dopo l'apertura tutti i campi hanno una  $x$  al centro tranne uno, in cui deve giocare la croce; assumiamo che questo campo sia il campo 0.

La croce gioca in  $(0,0)$ . A quel punto il cerchio gioca in una casella  $(0,j)$  del campo 0; l'obiettivo è mantenere il cerchio nel campo 0.

- Se il cerchio gioca in  $(0,j)$ , con  $j \in \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$ , allora la croce gioca in  $(j, 0)$ , costringendo il cerchio a giocare di nuovo nel campo 0.
- Se il cerchio gioca in  $(0, j)$ , con  $j \in \{4, 8\}$ , allora la croce gioca in  $(8,0)$ ; nel caso in cui il cerchio avesse giocato  $(0,4)$  è possibile giocare  $(8,0)$  perchè il campo 4 è già pieno. Se  $(8,0)$  è già stato giocato, allora la croce gioca  $(8,8)$  e vince il campo 8; qui finisce la fase di sviluppo.

Il numero di mosse dello sviluppo può variare, ma si osserva che non può essere sopra le 17 mosse.

### 6.3. Conclusione

Quando la croce si trova in un campo  $k$ , se è libero gioca  $(k,0)$ , altrimenti gioca  $(k, 8)$ . Si osserva che dopo un numero opportuno di mosse, ma comunque minore di 10, la croce vince.

## Bibliografia

- [1] L. Bichot, J. Bienvenu, M. Bienvenu, A. Nilsson, J. Somerville, *Reinforcement Learning Project - Ultimate Tic-Tac-Toe*: [https://josselinsomervilleroberths.github.io/papers/Report\\_INF581.pdf](https://josselinsomervilleroberths.github.io/papers/Report_INF581.pdf)
- [2] G. Bertholon, R. Géraud-Stewart, A. Kugelmann, T. Lenoir, D. Naccache, *At Most 43 Moves, At Least 29 - Optimal Strategies and Bounds for Ultimate Tic-Tac-Toe*: <https://arxiv.org/pdf/2006.0235>



# SPAZI SPETTRALI: QUANDO I PUNTI SONO NUMERI PRIMI

FRANCESCO STOPPA

## 1. Preliminari

D'ora in avanti  $A$  sarà un anello commutativo unitario e  $\mathfrak{p}$  indicherà sempre un ideale primo, in particolare l'anello stesso non si considera essere un ideale. Indichiamo inoltre con  $\sqrt{I}$  il radicale di un ideale, ovvero  $\sqrt{I} = \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} a^n \in I\}$ .

**Definizione 1.1:** Definiamo  $\text{Spec}(A)$  come l'insieme degli ideali primi di  $A$ .

Questo insieme si può dotare di una struttura di spazio topologico: Fissiamo  $I \subseteq A$  un ideale e consideriamo  $V(I) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) \mid I \subseteq \mathfrak{p}\}$ . Osserviamo che la famiglia  $\{V(I)\}_{I \subseteq A}$  è chiusa per unioni finite e intersezioni arbitrarie e che contiene sia  $\text{Spec}(A)$  che  $\emptyset$ . Quindi essa è interpretabile come insieme di chiusi per una topologia, chiamata topologia di Zariski.

**Esempio:** Un caso in cui si riesce a dare una caratterizzazione esplicita della topologia di Zariski è il caso dello spettro dell'anello di polinomi a coefficienti in un campo algebricamente chiuso: chiamiamo  $\mathbb{K}$  il campo e osserviamo che  $\mathbb{K}[X]$  è un PID, quindi possiamo identificare gli elementi dello spettro con un loro generatore. In particolare, essendo il campo algebricamente chiuso, si ha che ogni ideale primo ha un generatore della forma:  $X - a$  con  $a \in \mathbb{K}$ , pertanto abbiamo una biiezione tra  $\mathbb{K}$  e  $\text{Spec}(\mathbb{K}[X])$ , data dalla mappa di insiemi  $a \mapsto (X - a)$ . Per quanto riguarda invece la topologia si ha che ogni ideale è generato da un polinomio che sarà completamente fattorizzabile in fattori monici di primo grado:  $\forall I \subseteq A$  ideale  $I = (p(X))$   $p(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0 = (X - \alpha_0)\dots(X - \alpha_n)$ . Quindi la fattorizzazione ci indica direttamente in quali ideali primi  $I$  sarà contenuto e che questi sono sempre in numero finito. Quindi la topologia sarà tale che i chiusi saranno un arbitrario numero finito di elementi di  $\text{Spec}(\mathbb{K})$ . Usando ora la precedente identificazione, lo spettro con la topologia di Zariski sarà pensabile come  $\mathbb{K}$  munito della topologia cofinita.

**Osservazione:** Tramite un simile ragionamento si può dimostrare che anche  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$  ha come topologia la cofinita e che come insieme è pensabile come  $\mathbb{N}$ .

**Definizione 1.2:** Sia  $X$  uno spazio topologico, esso si dice spettrale se soddisfa le seguenti quattro proprietà:

- $X$  è  $T_0$  (i.e.  $\forall a, b \in X \exists U \subseteq X$  aperto tale che  $a \in U$  e  $b \notin U$  oppure  $b \in U$  e  $a \notin U$ )
- $X$  è compatto
- $X$  ammette una base di aperti compatti
- $X$  è sobrio, ovvero dato un qualunque chiuso  $C$  irriducibile (i.e. non esprimibile come unione di chiusi) esiste un unico  $x \in C$  tale che  $\{\bar{x}\} = C$ .

Il nome di questi spazi non è casuale, infatti si ha che lo spettro di un anello è sempre uno spazio spettrale. Vale quindi la pena chiedersi se la classe degli spazi spettrali sia effettivamente più grande oppure coincida con quella degli spettri degli anelli, ovvero se dato uno spazio spettrale esista effettivamente un anello  $A$  tale per cui  $X \cong \text{Spec}(A)$ .

## 2. L'idea

L'idea per costruire l'anello che ci serve è quella di vedere ogni anello come anello di funzioni di un certo spazio topologico. Più precisamente dato  $X$  spazio topologico e  $R$  anello topologico (con la topologia discreta per esempio), l'insieme  $\mathcal{C}(X, R) = \text{Hom}_{\text{Top}}(X, R)$  delle funzioni continue da  $X$  in  $R$  è esso stesso un anello, con le operazioni definite puntualmente grazie alla struttura di anello di  $R$ . È naturale considerare la mappa di valutazione, fissato un punto in  $x \in X$ ,  $ev_x : \mathcal{C}(X, R) \rightarrow R$  che agisce come segue:  $ev_x(f) = f(x)$ . Chiamiamo  $R_x = \text{Im}(ev_x)$  e  $I_x = \text{ker}(ev_x)$ . Dal primo teorema di isomorfismo vale  $R_x \cong \mathcal{C}(X, R)/I_x$ . Osserviamo subito che  $R_x$  è dominio se e solo e  $I_x$  è un ideale primo.

Quindi, nel caso in cui ciascun  $I_x$  sia primo, ponendo  $A = \prod_{x \in X} R_x$ , si ha una mappa naturale  $\Phi : X \hookrightarrow \text{Spec}(A)$  tale che  $x \mapsto I_x$ , che si mostra essere un embedding topologico. Questo ci permette di trasportare alcuni oggetti d'interesse dello spettro nello spazio  $X$ . Denotiamo gli aperti elementari  $D(f) = \{I \subseteq A \mid f \notin I\}$  e trasportiamoli in  $X$  tramite la mappa  $\Phi$ :  $d(f) = \Phi^{-1}(D(f))^{-1}$ ; procediamo allo stesso modo con i chiusi elementari:  $z(I) = \Phi^{-1}(V(I))$ .

Cercheremo allora di costruire un anello  $R$  per cui i  $d(f)$  siano sempre una base di compatti aperti, successivamente cercheremo una condizione necessaria e sufficiente su  $A$  e, infine, amplieremo quest'ultimo per raggiungere il nostro scopo.

## 3. Anelli di polinomi di funzioni caratteristiche

Fissiamo un campo  $\mathbb{K}$  e  $X$  uno spazio spettrale e consideriamo  $\mathcal{B}_X \subseteq \mathcal{K}(X)$  sottobase di compatti aperti. Definiamo  $T_X = \{t_U\}_{U \in \mathcal{B}_X}$ , un insieme di variabili formali, e delle funzioni caratteristiche associate  $\chi_U : X \rightarrow \mathbb{K}[T_X]$  che agisce come

segue:  $x \mapsto \begin{cases} t_U & x \in U \\ 0 & x \notin U \end{cases}$  e indichiamo con  $\chi$ , l'insieme di tutte queste.

Consideriamo quindi l'anello  $\mathbb{K}[\chi] \subseteq \mathcal{C}(X; \mathbb{K}[T_X])$ . Osserviamo che chiamando  $R = \mathbb{K}[\chi]$ , con le notazioni del paragrafo precedente, abbiamo  $R_x = \mathbb{K}[T_x]$ , con

$T_x = \{t_U \mid x \in U\}$  ed  $A_X = \{(ev_x(f))_{x \in X} \mid f \in \mathbb{K}[\chi]\} \subseteq \prod_{x \in X} R_x$ . Possiamo quindi definire la mappa  $\Phi : X \hookrightarrow \text{Spec}(A_X)$  come sopra.

**PROPOSIZIONE 3.1.** I  $d(f)$ , definiti come nel paragrafo precedente dalla mappa  $\Phi : X \hookrightarrow \text{Spec}(A_X)$ , sono compatti e formano una base per la topologia su  $X$ .

*Dimostrazione.* ci si limita a dare un'idea della dimostrazione. Ciascun elemento di  $A_X$  è della forma  $f = \sum_{i=1}^n \lambda_i m_i$  con ciascun  $m_i = \chi_{U_1}^{\alpha_1} \dots \chi_{U_n}^{\alpha_n}$  monomio e  $\lambda_i \in \mathbb{K}^\times$ . In particolare vale  $d(m_i) = \bigcap U_{j_i}$  e quindi  $d(f) = d(m_1) \cup \dots \cup d(m_n)$ . Quindi  $d(f)$  è unione finita di intersezioni finite di compatti, e quindi è compatto. Infine ogni elemento  $U \in \mathcal{B}_X$  è scrivibile come  $d(\chi_U)$ , quindi i  $\{d(f)\}$  sono una base.  $\square$

**TEOREMA 3.2.** Sia  $B \subseteq \mathcal{C}(X, R)$  sottoanello con  $\Phi : X \hookrightarrow \text{Spec}(B)$  tale che i  $\{d(f)\}$  siano una base di compatti, allora  $X \cong \text{Spec}(B) \iff \forall f \in B \text{ e } G \subseteq B \text{ finito, vale che } z(G) \subseteq z(f) \implies f \in \sqrt{G}$ .

*Dimostrazione.* Per dimostrare questo risultato andiamo a raffinare la topologia presente su  $\text{Spec}(B)$ : consideriamo  $\mathcal{K} = \{U^c \mid U \in \mathcal{K}(\text{Spec}(B))\}$  e definiamo la topologia che ha come base  $\mathcal{K}(X) \cup \mathcal{K}(X)$  e indichiamo questo spazio come  $\text{Spec}(B)_{con}$ . Segue che  $X$  è chiuso in  $\text{Spec}(B)_{con}$ , infatti con questa topologia  $\text{Spec}(B)_{con}$  è T2 e  $X$  è compatto, quindi è chiuso. Tuttavia se  $X$  fosse contenuto propriamente in  $\text{Spec}(B)$ , allora dovrebbe esistere  $C$  chiuso tale che  $X \subseteq C \subset \text{Spec}(B)_{con}$ . Per come è stata definita la topologia si ha che i  $V(f) \cup \bigcup_{0 < i \leq m} D(g_i)$   $f, g_1, \dots, g_m \in B$  sono una base di chiusi. Quindi  $X \subseteq V(f) \cup \bigcup_{0 < i \leq m} D(g_i) \subset \text{Spec}(B)_{con}$ , ovvero  $X \subseteq V(f) \cup \bigcup_{0 < i \leq m} V(g_i)^c = V(f) \cup (\bigcap_{0 < i \leq m} V(g_i))^c = V(f) \cup V(G)^c$ . Si ha che  $X \subseteq V(G)^c \cup V(f) \iff z(G) \subseteq z(f)$ , ma per ipotesi  $z(G) \subseteq z(f) \implies f \in \sqrt{G} \implies V(G) \subseteq V(f) \implies V(f) \cup V^c(G) = \text{Spec}(B)_{con}$ . Ma quindi deve essere per forza  $X = \text{Spec}(B)$

$\square$

A partire da questa condizione possiamo cercare di modificare il nostro anello  $A_X$  al fine che rispetti le ipotesi del Teorema 3.2. In particolare la prossima proposizione ci fornisce una condizione con ipotesi più stringenti, ma che risulta più maneggevole nel nostro caso, di cui però non viene riportata la dimostrazione:

**PROPOSIZIONE 3.3.** Se  $\forall f \in B \text{ Im}(f)$  è finita, allora  $\forall g_1, \dots, g_n \exists g \in B$  tale che  $\bigcap z(g_i) = z(g)$ .

**PROPOSIZIONE 3.4.**  $A_X$  verifica le ipotesi del teorema precedente.

*Dimostrazione.* Ciascun elemento di  $A_X$  è della forma  $f = \sum_{i \in I} a_i \prod_{j \in J} \chi_{U_j}$ . Consideriamo quindi  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}$ , si ha che  $f_x \neq 0 \implies \exists U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$  tali che  $x \in \bigcap U_i$ , ma quindi  $\text{Im}(f)$  è finita.  $\square$

Osserviamo che grazie a questi ultimi risultati abbiamo ridotto la richiesta di  $G$  finito del Teorema 3.2 grazie alla proposizione 3.3, ad un solo elemento  $g$  e abbiamo

mostrato che questo vale sempre in  $A_x$  grazie alla proposizione 3.4. Quindi ci rimane da capire come fare in modo che  $z(g) \subseteq z(f) \Rightarrow f \in \sqrt{g}$ .

#### 4. Estensione tramite valutazioni discrete

Attualmente siamo nella condizione in cui lo spazio spettrale considerato ammette un embedding nello spettro dell'anello  $A_X$ , quindi il problema è che ci sono troppi ideali primi in  $A_X$ . Un modo di ridurre il numero di ideali primi è quello di espandere l'anello aggiungendo inversi di opportuni elementi. Quello che faremo in quest'ultimo paragrafo sarà istituire un criterio per scegliere quali elementi invertire. Per adempiere al nostro scopo sfrutteremo il concetto di anello di valutazione discreta.

Dato un  $x \in X$  ed un  $t_U \in T_x = \{t_U \in T_X \mid x \in U\}$  indichiamo con  $x \rightsquigarrow y$  che  $y \in \{\bar{x}\}$  e definiamo  $v_{x \rightsquigarrow y}(t_U) = \begin{cases} 1 & y \notin U \\ 0 & y \in U \end{cases}$ .

Estendiamo poi la definizione a tutti gli elementi dell'anello  $A_X$ :

- $v_{x \rightsquigarrow y}(\prod t_{U_i}^{\alpha_i}) = \sum_i \alpha_i v_{x \rightsquigarrow y}(t_{U_i})$
- $v_{x \rightsquigarrow y}(\sum \lambda_i m_i) = \min(v_{x \rightsquigarrow y}(m_i))$ , dove  $m_i$  è un monomio senza coefficiente.

Osserviamo che

- $v_{x \rightsquigarrow y}(f) > 0 \Leftrightarrow f_y = 0$ .
- $\forall f \in B \exists N_f \in \mathbb{N}$  tale che  $v_{x \rightsquigarrow y}(f) \leq N_f \forall x, y$  tali che  $x \rightsquigarrow y$ .

Il nostro intento attuale sarà quello di aggiungere elementi della forma  $(\frac{f_x}{g_x})_{x \in X}$ , affinché il nostro nuovo anello sia sottoanello di  $\prod_{x \in X} \mathcal{Frac}(R_x)$ . Più precisamente

definiamo  $(\frac{f}{g})_x = \begin{cases} \frac{f_x}{g_x} & g_x \neq 0 \\ 0 & g_x = 0 \end{cases}$ .

Osserviamo ora che, sotto le nostre ipotesi, l'anello  $A_X[\frac{f}{g}]$  rimane tale che i suoi elementi hanno immagine finita. Inoltre sotto l'ipotesi in cui  $v_{x \rightsquigarrow y}(f_x) \geq v_{x \rightsquigarrow y}(g_x) \forall x \rightsquigarrow y$  (caso in cui chiameremo  $(\frac{f}{g})$  elemento ammissibile) si ha che i  $d(h)$  sono una base di aperti compatti.

Osservate queste due proprietà possiamo procedere con la costruzione dell'anello che ci servirà. Procediamo induttivamente: iniziamo ponendo  $A_0 = A_X$  e definiamo  $B_i = \{\frac{f}{g} \mid f, g \in A_i \mid v_{x \rightsquigarrow y}(f) > v_{x \rightsquigarrow y}(g) \forall x \rightsquigarrow y\}$ . Definiamo quindi  $A_{i+1} = A_i[B_i]$  e consideriamo  $A_\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ , questo mostreremo essere l'anello cercato.

Iniziamo osservando che, poiché ogni elemento è ammissibile, i  $d(f)$  sono una base di compatti aperti e che ogni elemento ha immagine finita.

**TEOREMA 4.1.**  $A_\omega$  è tale che  $z(g) \subseteq z(f) \Rightarrow f \in \sqrt{g}$ .

*Dimostrazione.* Siano  $f, g \in A_\omega$  tali che  $z(g) \subseteq z(f)$ , vogliamo mostrare che  $\exists n \in \mathbb{N}, r \in A_\omega$  tali che  $f^n = rg$ . Sappiamo che esistono  $i, N_g \in \mathbb{N}$  tali per cui  $f, g \in A_i$  e  $\forall x \rightsquigarrow y$  si abbia  $v_{x \rightsquigarrow y}(g) \leq N_g$ , quindi  $v_{x \rightsquigarrow y}(f_x^{N_g+1}) = (N_g + 1)v_{x \rightsquigarrow y}(f_x) \geq v_{x \rightsquigarrow y}(g_x)$



a meno che  $v_{x \rightsquigarrow y}(g_x) = 0$  e  $g_x = 0$  per cui vale l'uguaglianza. Siccome, se  $g_x = 0$ , allora  $f_x = 0$ , poiché  $z(g) \subseteq z(f)$ , e  $v_{x \rightsquigarrow y}(f_x) = 0$  se  $f_y \neq 0$ , si deve avere  $g_y \neq 0$  che ci dice che  $v_{x \rightsquigarrow y}(g_x) = 0$ . Abbiamo quindi ottenuto che  $\frac{f^{N_g+1}}{g}$  è ammissibile, ma quindi  $\frac{f^{N_g+1}}{g} \in A_{i+1}$ . Concludiamo che  $\frac{f^{N_g+1}}{g} \in A_\omega \Rightarrow r = \frac{f^{N_g+1}}{g} \Leftrightarrow gr = f^{N_g+1}$ .  $\square$

Abbiamo quindi costruito un anello tale per cui il suo spettro è effettivamente lo spazio spettrale arbitrario fissato inizialmente, dimostrando che la classe degli spazi spettrali coincide con quella degli spettri degli anelli commutativi unitari. In realtà il risultato si può estendere anche alle mappe, considerando una sottoclasse di mappe tra spazi spettrali, dette mappe spettrali, che corrispondono anch'esse biunivocamente alle mappe di anelli, dando così un'effettiva equivalenza categoriale tra la categoria degli spazi spettrali e quella degli schemi affini.



# LA GEOMETRIA DEI COLORI

ELIA PRADERIO

## Capitolo 0: Introduzione

Per chi si cimenta nella pittura, la padronanza dei colori è uno degli ostacoli più difficili da superare, insieme a prospettiva e anatomia. Ciò non deve sorprendervi: dopotutto, attraverso la giusta combinazione di colori l'artista riesce ad esprimere atmosfere, emozioni e a volte intere storie. Per fare ciò l'artista deve conoscere a fondo concetti come saturazione, luminosità, colori caldi e freddi, contrasto e via dicendo; concetti che, almeno io personalmente, ho sempre trovato molto confusi e difficili da capire senza una definizione precisa. Il proposito di questo seminario è cercare di vedere i colori da un punto di vista matematico, ovvero cercheremo di trovare un *modello* per la nostra *teoria dei colori*, e per farlo ci rivolgeremo alla geometria. Chiaramente, dato che siamo alla ricerca di un modello, non è detto che ne esista uno solo<sup>1</sup>, anzi in questo seminario ne esporremo tre diversi, alcuni più semplici e naive, e altri più elaborati e interessanti. Infine, mi rendo conto dell'ironia di stampare in bianco e nero un articolo sulla teoria dei colori; per chi volesse visualizzarne una versione digitale e colorata, la può trovare al seguente link.

<https://tinyurl.com/mwt2jre8>

## Capitolo 1: Il mio amico fisico al paninaro

Questo seminario in realtà nasce perché un paio di mesi fa stavo scambiando quattro chiacchiere al paninaro con un mio amico che si è recentemente laureato in fisica. In mezzo a un discorso tra un boccone e l'altro se ne esce con «No perché io non ci avevo mai pensato prima ma i colori sono uno spazio vettoriale». Cosa intendeva con questo? Il mio amico aveva in mente il modo in cui i computer codificano il colore, ovvero attraverso il modello **RGB**. Come funziona il modello RGB? In pratica prende tre colori - il rosso (Red), il verde (Green) e il blu (Blue) - e somma diverse gradazioni di questi tre colori.

---

<sup>1</sup>Per esempio,  $\mathbb{Z}$  e  $\mathbb{Q}$  sono due diversi modelli della teoria dei gruppi abeliani. In generale, è molto più facile avere teorie che ammettono più modelli diversi rispetto a teorie che ne ammettano uno solo.



Dal punto matematico questo modello si traduce nella seguente definizione.

**DEFINIZIONE 1.** Un **colore**  $C$  è una combinazione lineare di tre vettori linearmente indipendenti:  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{G}$ , e  $\mathbf{B}$ .

$$C = \lambda_R \mathbf{R} + \lambda_G \mathbf{G} + \lambda_B \mathbf{B}$$

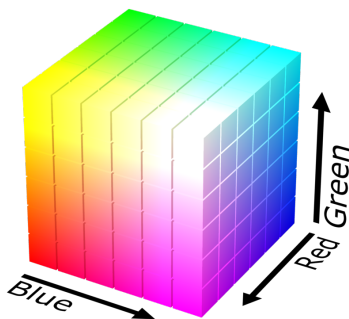
dove  $\lambda_i \in [0, 1]$ .

Adesso, noi l'abbiamo chiamata definizione ma effettivamente ciò che ci comunica è semmai una proprietà dello spazio dei colori: ovvero che è possibile replicare qualsiasi colore sommandone tre diversi, a patto che questi tre siano effettivamente diversi, ovvero linearmente indipendenti.

A tal proposito osserviamo che abbiamo scelto il rosso il verde e il blu ma ci sono diverse scelte equivalenti a seconda dei tre vettori che prendiamo come base: **CYM**, **XYZ** e **LMS** sono tutti modelli che hanno alla base la stessa intuizione matematica, con diverse basi di vettori per diverse esigenze<sup>2</sup>.

Siamo arrivati dunque al primo nostro modello.

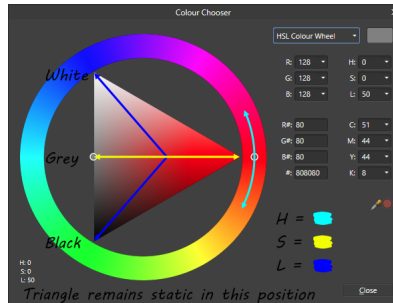
**TEOREMA (Modello 1).** *Lo spazio dei colori è un cubo.*



<sup>2</sup>vale la pena di osservare che le stampanti utilizzano quattro vettori anziché tre: il ciano, il magenta, il giallo e il nero (**CMYK**). Questo è dovuto al fatto che, nonostante il nero possa essere ottenuto mescolando in ugual quantità gli altri tre colori, sarebbe decisamente poco pratico ed esaurirebbe subito tutti i toner colorati.

## Capitolo 2: Photoshop e i Colori Immaginari

Photoshop, come altri software di disegno digitale, rappresenta la tavolozza dei colori attraverso la cosiddetta *color wheel*.



Dunque, quando il mio amico mi ha parlato di cubi, segmenti e rette, io ero confuso perché in mente avevo un cerchio. E d'altronde lo sappiamo: nonostante da vicino possano apparire uguali<sup>3</sup>, le rette non sono cerchi e i cerchi non sono rette. Com'è possibile questa discrepanza? Per risolverla dobbiamo parlare di fisica. D'altronde non siamo i primi a cimentarci nel compito di modellizzare la teoria dei colori: lo studio del colore è uno studio millenario, che passa da Empedocle a Leonardo da Vinci fino al padre della fisica classica, Newton.

Da Newton abbiamo la seguente definizione:

**DEFINIZIONE 2.** Un **colore** è un'onda elettromagnetica (un raggio luminoso), la cui lunghezza d'onda  $\lambda$  appartiene allo spettro visibile, ovvero all'intervallo  $\Lambda = [\lambda_m, \lambda_M]$ , dove  $\lambda_m \sim 380nm$  e  $\lambda_M \sim 750nm$ .

Questa definizione, nonostante vada verso la corretta direzione, ancora non funziona. L'intervallo chiuso è ancora un segmento, non ci spiega da dove viene il cerchio della color wheel. Ciò ci porta al punto più importante di questa sezione: **noi percepiamo un colore in più rispetto allo spettro visibile: il magenta.**

I raggi di luce la cui lunghezza d'onda tende al valore  $\lambda_m$  sono raggi di luce rossa (e quelli con un l.o. minore di  $\lambda_m$  sono i cosiddetti infrarossi), mentre i raggi la cui lunghezza d'onda tende al valore  $\lambda_M$  ci appaiono violetti (e se superano  $\lambda_M$  vengono detti ultravioletti): il nostro cervello percepisce in mezzo a questi due estremi il magenta, un colore che non corrisponde a nessuna lunghezza d'onda sullo spettro visibile.

Da questo fatto - ed è un fatto perché il magenta riusciamo effettivamente a vederlo - possiamo dedurre due importanti conclusioni.

**TEOREMA.** Lo spazio dei colori  $\mathcal{C}$  della definizione 2 e lo spazio dei colori percepiti  $\mathcal{P}$  sono due spazi diversi.

Questa da una parte è una buona notizia perché se avessimo avuto a che fare solamente con lunghezze d'onda in un intervallo chiuso, questo seminario sarebbe

<sup>3</sup>la corretta terminologia sarebbe "localmente omeomorfi".

risultato molto più noioso. Dall'altra parte invece ci complica moltissimo le cose perché vuol dire che non stiamo più provando a modellare un fenomeno fisico, ma un fenomeno *psicofisico*.

L'esistenza del magenta ci permette di raggiungere un'altra importante conclusione, centrale per questo capitolo.

**TEOREMA.** *Lo spazio dei colori percepiti saturi  $\mathcal{P}_S$  è un cerchio  $S^1$ .*

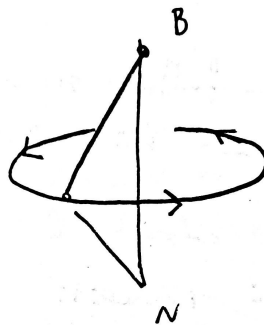
*Dimostrazione.* Innanzitutto capiamo bene cosa intendiamo con colori saturi. Un'onda elettromagnetica trasporta una certa quantità di energia. Più l'energia è alta, più noi percepiamo il colore come "bianco". Viceversa, se l'energia tende a zero, percepiremo il colore come "nero". Ci sarà dunque una via di mezzo in cui percepiremo il colore come né bianco né nero: tali colori si chiamano **saturi** e possiamo pensarli come i colori "puri". Fatta questa premessa, è facile capire perché lo spazio  $\mathcal{P}_S$  sia un cerchio. Definiamo la relazione di equivalenza  $\sim$  tra due colori  $a$  e  $b$  come:

$$a \sim b \text{ se e solo se (dette } \lambda_a \text{ e } \lambda_b \text{ le due lunghezze d'onda) } \lambda_a = \lambda_b$$

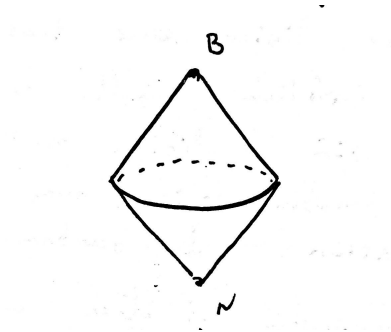
**oppure**  $\lambda_a = \lambda_m$  e  $\lambda_b = \lambda_M$  o viceversa.

In pratica stiamo "incollando" i due estremi dell'intervallo chiuso  $[\lambda_m, \lambda_M]$  ed è chiaro che incollando le due estremità di un segmento si ottiene un cerchio.  $\square$

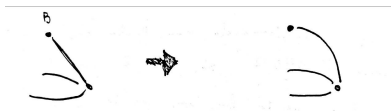
Bene, adesso che abbiamo i colori saturi, ci basta aggiungere il bianco ed il nero per ottenere tutto lo spazio  $\mathcal{P}$  dei colori percepiti. Aggiungiamo quindi un segmento  $[-1, 1]$  e facciamo ruotare il triangolo così ottenuto lungo la color wheel.



Otteniamo così due coni uno incollato sull'altro.



Tuttavia fare geometria sui coni è spiacevole per svariati motivi, il primo dei quali è il fatto che il vertice di un cono è un punto angoloso, nel quale limiti e derivate si comportano male. Per sopperire a questa mancanza, modifichiamo di poco la nostra costruzione. Il segmento che congiunge le estremità del segmento bianco-nero alla color wheel è sicuramente omeomorfo a un arco di circonferenza.



Dopotutto, stiamo solo "piegando" il nostro segmento. Ciò ci porta al seguente teorema.

**TEOREMA (Modello 2).** *Lo spazio dei colori percepiti  $\mathcal{P}$  è una sfera.*

Prima di passare al prossimo modello, spendiamo due parole per mostrare come questo modello spiega vari concetti della teoria dei colori.

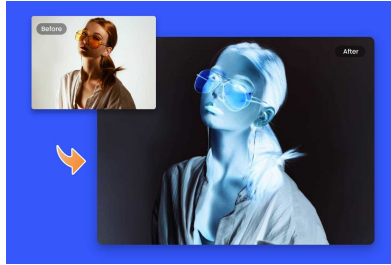
**DEFINIZIONE 3.** Un colore  $c = (c_x, c_y, c_z)$  si dice **saturo** se  $c_z = 0$ .

**DEFINIZIONE 4.** Il **valore** di un colore  $c$  è la sua proiezione sulla scala di grigi, ovvero il colore  $(0, 0, c_z)$ .

**DEFINIZIONE 5.** Un'**immagine** è una funzione  $i$  (non necessariamente continua) dal quadrato  $[0, 1] \times [0, 1]$  (la tela) allo spazio dei colori percepiti  $\mathcal{P}$ . Colorare una tela vuol dire colorarne ogni punto, ovvero associare ad ogni punto un colore.

**DEFINIZIONE 6.** Data un'immagine  $i$ , il negativo di quell'immagine è la composizione di  $i$  con la mappa antipodale  $A$ . Dove

$$\begin{aligned} A : \mathcal{P} &\longrightarrow \mathcal{P} \\ c &\longmapsto -c \end{aligned}$$



### Capitolo 3: Resnikoff

La sezione che segue è essenzialmente una rielaborazione di un articolo di Howard Resnikoff (1937-2018), il quale è stato un matematico statunitense. Sua moglie, Joan Resnikoff è artista e pittrice.

Innanzitutto partiamo dalla luce.

**DEFINIZIONE 7.** Denotiamo con  $x : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^+$  la funzione luce che rappresenta la radiazione elettromagnetica causa dello stimolo del colore nel nostro occhio, che chiameremo **luce fisica**.

Dal momento che la luce da noi percepita ha energia finita, cosa che in termini matematici si traduce in

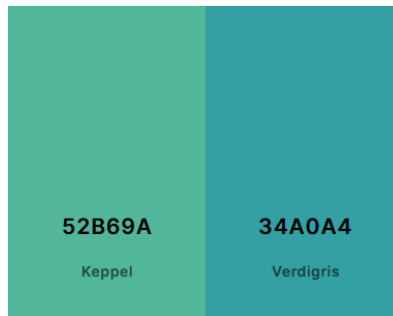
$$\int_{\Lambda} x(\lambda)^2 d\lambda < +\infty$$

allora una luce fisica può essere vista come un elemento dello spazio  $L^2(\Lambda)$ . Ciò ci torna utile perché lo spazio  $L^2(\Lambda)$  è dotato di una naturale struttura di spazio vettoriale, che verrà poi ereditata dal nostro spazio dei colori percepiti  $\mathcal{P}$ . Adesso, ciò che avevamo fatto nel capitolo 2 era di descrivere lo spazio delle onde per poi quotientarlo su di una relazione di equivalenza. L'idea qui è essenzialmente la stessa, ciò che cambia è la relazione di equivalenza.

**DEFINIZIONE 8.** Due elementi  $x$  e  $y \in L^2(\Lambda)$  si diranno **percepiti identici** ( $x \sim y$ ) se essi sono percepiti identici in un esperimento di color matching.

Dove l'esperimento di color matching consiste nel apporre le due luci fisiche una di fianco all'altra. Se il nostro occhio nota una riga di divisione tra i due colori, essi non sono percepiti identici. Se tale riga è invisibile invece, saranno percepiti identici.





DEFINIZIONE 9. Definiamo lo spazio dei colori percepiti  $\mathcal{P}$  come

$$\mathcal{P} := L^2(\Lambda)/\sim$$

Questa definizione ha dei pregi e dei difetti. Il suo più grande pregio è che è abbastanza tautologica e dunque dovrebbe risultare abbastanza condivisibile come definizione. Il prezzo da pagare è che la relazione d'equivalenza così introdotta è assolutamente implicita e non ci dice niente di concreto su com'è fatto  $\mathcal{P}$ .

Ciò che possiamo fare tuttavia è dotare  $\mathcal{P}$  di una struttura di spazio vettoriale, ereditata da  $L^2(\Lambda)$ , definendo

$$a[x]_{\sim} + b[y]_{\sim} = [ax + by]_{\sim}$$
<sup>4</sup>

Si può mostrare che tale definizione è ben posta [Dub] e rende  $\mathcal{P}$  uno spazio vettoriale reale.

In realtà è doveroso notare che le combinazioni lineari che possiamo fare con i nostri colori non sono tutte. La moltiplicazione per uno scalare corrisponde ad aumentare o a ridurre l'energia trasportata dalla radiazione luminosa, mentre la somma di due colori corrisponde alla sovrapposizione di due raggi luminosi. Dunque non possiamo *sottrarre* un colore da un altro, o comunque non possiamo farlo rimanendo in  $\mathcal{P}$ . Le combinazioni lineari che possiamo fare sono solo quelle con coefficienti  $\geq 0$  e si chiamano **combinazioni lineari coniche**<sup>5</sup>.

Il lettore attento avrà notato che nell'introduzione ci siamo posti l'obbiettivo di trovare un modello per la nostra teoria dei colori, ma non abbiamo mai esplicitato quali assiomi compongono la nostra teoria. Per fare ciò, Resnikoff attinge alla storia millenaria dello studio del colore e prende come assiomi i risultati degli esperimenti dei fisici nel corso dei secoli.

ASSIOMA 1 (Newton, 1704). Se  $x \in \mathcal{P}$  e  $a \in \mathbb{R}^+$ , allora  $ax \in \mathcal{P}$ .

ASSIOMA 2 (Schrödinger, 1920). Se  $x \in \mathcal{P} - \{0\}$ , allora non esiste  $y \in \mathcal{P}$  tale che  $x + y = 0$ .

<sup>4</sup>per alleggerire la notazione, d'ora in poi indicheremo la classe d'equivalenza  $[x]_{\sim}$  semplicemente come  $x$

<sup>5</sup>l'idea è che in tre dimensioni lo spazio vettoriale che ne esce è il primo degli otto quadranti di  $\mathbb{R}^3$ , che può essere visto come una sorta di "cono spigoloso".

ASSIOMA 3 (Grassmann & Helmholtz, ~1850). Se  $x, y \in \mathcal{P}$  e  $a \in [0, 1]$ , allora  $ax + (1-a)y \in \mathcal{P}$ .

ASSIOMA 4 (Grassmann, 1853). Per ogni quadrupla  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  di colori percepiti, esiste una quadrupla  $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4$  non tutti contemporaneamente nulli tale che

$$\sum_{i=1}^4 a_i x_i = 0$$

Discutiamo adesso il significato di questi assiomi.

- (1) L'assioma 1 ci sta dicendo che  $\mathcal{P}$  è un **cono** infinito contenuto in uno spazio vettoriale.
- (2) L'assioma 2 ci dice che la sovrapposizione di due colori non entrambi nulli non può essere percepita come l'assenza di luce, ovvero che  $\mathcal{P}$  è un cono **regolare**.
- (3) L'assioma 3 ci dice che il segmento che unisce due colori è tutto contenuto in  $\mathcal{P}$ , ovvero che  $\mathcal{P}$  è uno spazio **convesso**, e dunque il suo gruppo fondamentale è banale!
- (4) L'assioma 4 ci dice lo spazio vettoriale che contiene  $\mathcal{P}$  è uno spazio vettoriale **3-dimensionale**.

Spendiamo due ulteriori parole per discutere gli assiomi 2 e 4, che sembrano contraddirsi a vicenda. L'assioma 2 ci dice che se  $x$  è un colore non completamente nero, allora  $-x$  non è un colore. Tuttavia ciò non vuol dire che  $-x$  non esista da nessuna parte: esiste nello spazio vettoriale  $V$  che contiene  $\mathcal{P}$  e l'assioma 4 ci garantisce che tale spazio vettoriale ha dimensione 3.

La grande idea di Resnikoff è quella di vedere  $\mathcal{P}$  come uno spazio *omogeneo*. Fissiamo bene la notazione.

DEFINIZIONE 10. Sia  $X$  insieme non nullo e  $G$  gruppo. Una funzione  $\eta : X \times G \rightarrow X$  tale che

- (1)  $\eta(x, e) = x \quad \forall x \in X$
- (2)  $\eta(\eta(x, g), h) = \eta(x, hg) \quad \forall x \in X \forall g, h \in G$

è detta **azione** (sinistra) di  $G$  su  $X$ .

In generale, l'azione  $\eta$  può essere vista anche come un morfismo di gruppi

$$\begin{aligned} \eta : G &\longrightarrow \text{Aut}(X) \\ g &\longmapsto g(-) := \eta(-, g) \end{aligned}$$

Se poi  $X$  ha una qualche struttura (per esempio nel caso che interessa a noi quella di spazio topologico) e le  $g(-)$  sono morfismi che preservano tale struttura<sup>6</sup> di  $X$  (come per esempio delle mappe continue), allora  $X$  viene detto **G-spazio**.

<sup>6</sup>il giusto termine sarebbe "morfismi della categoria di  $X$ ".

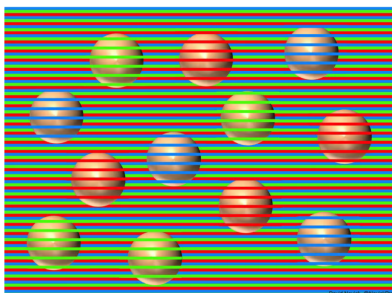
DEFINIZIONE 11. Dato  $x \in X$ , l'insieme  $G \cdot x := \{y \in X \text{ tali che } y = g(x) \text{ per un certo } g \in G\}$  è detto **orbita** di  $x$ . L'azione di  $G$  su  $X$  è detta **transitiva** se  $G \cdot x = X$  per ogni  $x \in X$ . Infine,  $X$  è detto  **$G$ -omogeneo**<sup>7</sup> se l'azione di  $G$  su  $X$  è transitiva.

TEOREMA. Lo spazio dei colori percepiti  $\mathcal{P}$  è uno spazio omogeneo.

Innanzitutto, prima di procedere nella dimostrazione, la nostra definizione di  $\mathcal{P}$  va (ancora una volta) leggermente modificata. Il fatto è che noi, quando percepiamo un colore, non lo percepiamo nel vuoto ma lo percepiamo immerso in uno sfondo, anch'esso colorato. E al variare del colore dello sfondo, varia anche il colore che percepiamo.



Questa è anche la causa dietro alle varie illusioni ottiche che ingannano il nostro occhio a pensare che due colori siano lo stesso, o viceversa.



Dunque, per l'ultima volta adesso:

DEFINIZIONE 12. Lo spazio dei colori percepiti  $\mathcal{P}$  è lo spazio  $(L^2(\Lambda) \times L^2(\Lambda))/\sim$ . Dove il primo termine del prodotto si riferisce al colore al centro, mentre il secondo al colore di sfondo.

Finalmente siamo pronti a dimostrare il teorema.

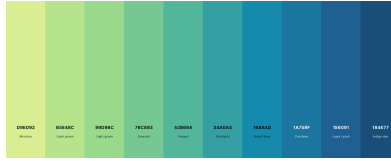
*Dimostrazione.* Innanzitutto, omogeneo rispetto a quale gruppo? Rispetto ad  $Aut(\mathcal{P})$ , che è il gruppo delle trasformazioni lineari di  $V$  che preservano  $\mathcal{P}$  e il suo orientamento, ovvero:

$$Aut(\mathcal{P}) = GL^+(\mathcal{P}) = \{B \in GL(3, \mathbb{R}) : \det B > 0, B(x) \in \mathcal{P} \forall x \in \mathcal{P}\}$$

Ci riferiremo a questo gruppo come il gruppo dei **cambi di sfondo**. Adesso, è generalmente risaputo nel mondo dell'arte che, cambiando il colore dello sfondo, è

<sup>7</sup>la terminologia deriva dal fatto che se l'azione è transitiva, non ci sono punti più speciali di altri, poiché ogni punto è raggiungibile tramite un automorfismo. In questo senso lo spazio è da intendersi omogeneo.

possibile cambiare il colore percepito in un qualsiasi colore "sufficientemente vicino".



Nel mondo dell'arte una simile trasformazione prende il nome di *gradiente*<sup>8</sup>. Questo, dal punto di vista matematico, si traduce in una proprietà di **locale omogeneità** di  $\mathcal{P}$  rispetto al gruppo  $Aut(\mathcal{P})$  dei cambi di sfondo. Dimostriamo adesso che la locale omogeneità è equivalente all'omogeneità globale.

Siano  $x$  e  $y$  due colori in  $\mathcal{P}$ . Allora, per l'assioma 3, il segmento  $l$  che li unisce è interamente contenuto in  $\mathcal{P}$ . Ora, per ipotesi di locale omogeneità, per ogni  $z$  in  $l$  esiste un suo intorno aperto  $U_z$  tale che ogni punto  $w$  in  $U_z$  sia immagine di  $z$  tramite un elemento  $B_{zw} \in GL^+(\mathcal{P})$ . Dunque la collezione  $\{U_z\}$  è un ricoprimento aperto di  $l$ , che, essendo un segmento, è compatto. Quindi essa ammette un sottoricoprimento finito  $\{U_{x_k}\}$  con  $k = 1, \dots, n$ ; e questo ci basta per terminare la dimostrazione. Infatti  $x$  raggiunge  $x_1$  tramite un elemento  $B_1$  di  $GL^+(\mathcal{P})$ ,  $x_1$  raggiunge un elemento nell'intersezione  $U_{x_1} \cap U_{x_2}$ <sup>9</sup> che possiamo chiamare  $x_{1/2}$  tramite un elemento  $B_{1/2}$ , il quale a sua volta raggiungerà  $x_2$  tramite un elemento  $B_2$  e via così fino a  $y$ . La composizione di questi automorfismi è ancora un automorfismo che manda  $x$  in  $y$ , dunque  $\mathcal{P}$  è globalmente omogeneo.  $\square$

Noi però in questa dimostrazione abbiamo barato, perché abbiamo dimostrato il teorema non partendo dagli assiomi, ma da un'ipotesi di locale omogeneità giustificata dalle nostre esperienze fisiche. Ha dunque più senso chiamarlo

ASSIOMA 5 (Resnikoff, 1974). Lo spazio dei colori percepiti  $\mathcal{P}$  è un  $GL^+(\mathcal{P})$ -spazio omogeneo.

Arrivati a questo punto è legittimo chiedersi perché l'omogeneità è una proprietà così importante. La risposta è data dal fatto che gli spazi omogenei che soddisfano gli assiomi 1-4 sono stati completamente classificati.

TEOREMA. *Dati gli assiomi 1-5, lo spazio dei colori percepiti può essere diffeomorfo solamente a:*

- (1)  $\mathcal{P}_1 \simeq \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$
- (2)  $\mathcal{P}_1 \simeq \mathbb{R}^+ \times \frac{SL(2, \mathbb{R})}{SO(2)}$

*Dimostrazione.* La dimostrazione, che omettiamo per alleggerire questa già pesante trattazione, è dovuta a Sophus Lie (1842, 1899), [Lie].  $\square$

Chi sono questi due spazi? Nel primo caso ritroviamo il modello RGB, il nostro cubo che abbiamo studiato nel primo capitolo. Il teorema però afferma che c'è un altro, più inesplorato, caso.

<sup>8</sup>il nome non ci deve trarre in inganno. Infatti è stato dimostrato [Prov] che tale trasformazione non è affatto lineare.

<sup>9</sup>senza perdita di generalità possiamo ordinare gli aperti in modo tale che formino una catena.

Lo spazio  $\frac{SL(2,\mathbb{R})}{SO(2)}$  si chiama spazio di Poincaré-Lobačevskij ed è un modello di **piano iperbolico**. Concludiamo questa trattazione con una breve discussione sulla geometria iperbolica. Come ben sappiamo, la geometria euclidea deve il suo nome e la sua formulazione a Euclide (IV - III sec. a.C.) che ne enunciò i postulati.

- (1) Per due punti passa una e una sola retta.
- (2) Una retta è composta da infiniti punti.
- (3) Dato un punto e una lunghezza, è possibile descrivere un cerchio.
- (4) Tutti gli angoli retti sono congruenti.
- (5) Data una retta e un punto non appartenente ad essa, esiste **una sola** retta passante dal punto e parallela alla retta data.

Il quinto postulato è quello dalla storia più turbolenta. I matematici per anni hanno cercato di dimostrarlo a partire dagli altri quattro, definendolo "l'unico neo di Euclide". Per farlo hanno cercato una dimostrazione per assurdo e, come in ogni dimostrazione per assurdo, sono partiti negando la tesi e cioè partendo da una delle due ipotesi:

- (1) Data una retta e un punto non appartenente ad essa, **non esiste** una retta passante dal punto e parallela alla retta data.
- (2) Data una retta e un punto non appartenente ad essa, esistono **due** rette passanti dal punto e parallele alla retta data.

Inutile dire che l'assurdo non è stato trovato. La geometria sviluppatasi sostituendo al quinto postulato la prima delle ipotesi sopracitate, prende il nome di **geometria parabolica**. Mentre quella che prende come assioma la seconda ipotesi si chiama **geometria iperbolica**.

Il modello RGB è stato studiato e ingegnerizzato per anni, e i suoi risultati sono sotto i nostri occhi nei monitor dei nostri televisori e dei nostri smartphone. Resnikoff ci suggerisce una possibile alternativa, una strada inesplorata per guardare i colori da una nuova, non-euclidea, prospettiva.

### Bibliografia

- [R] Resnikoff HL. Differential geometry and color perception. J.Math. Biol. 1974; 1:97-131.
- [D] Dubois E. The structure and properties of color spaces and the representation of color images; 2009. (Synthesis lectures on image, video, and multimedia processing; vol. 4).
- [P] Provenzi, E. Geometry of color perception. Part 1: structures and metrics of a homogeneous color space. J. Math. Neurosc. 10, 7 (2020).  
<https://doi.org/10.1186/s13408-020-00084-x>
- [L] Lie S. Theorie der Transformationsgruppen III. Leipzig: Teubner; 1893



# SI PUÒ DAVVERO MESCOLARE IL CAFFÈ?

FRANCESCO PAGLIARIN

Se prendiamo una tazzina piena di caffè e mischiamo il liquido con un cucchiaino, lo stiamo davvero mischiando? Ovvero, tutte le “molecole di caffè” cambiano posizione rispetto al momento di quiete iniziale? La risposta a questa domanda risiede in un famoso teorema di punto fisso.

In matematica, i teoremi di punto fisso, di cui esistono una grande quantità di versioni, vengono spesso utilizzati per diversi scopi. Ad esempio, il teorema di punto fisso di Banach-Caccioppoli viene utilizzato per dimostrare l’esistenza e l’unicità per problemi di Cauchy, sia nel caso deterministico sia in analisi stocastica. Questo è un teorema tuttavia con ipotesi forti, in cui si richiede che la distanza tra i punti “diminuisca” sotto l’azione della mappa e che quindi non rientra nel caso del caffè. In altre situazioni quindi, in cui ciò non si verifica, è necessario impiegare altri teoremi di punto fisso. Alcuni di questi, come quello di Brouwer e Schauder, richiedono solamente ipotesi topologiche sul dominio e di continuità della funzione. Tali teoremi vengono spesso utilizzati in teoria dei giochi e in analisi non lineare per provare l’esistenza di alcune equazioni alle derivate parziali.

Nonostante le dimostrazioni dei teoremi di punto fisso siano spesso fatte impiegando risultati topologici, in queste note daremo una dimostrazione prettamente analitica, utilizzando alcuni concetti del calcolo delle variazioni.

Fissiamo un po’ di notazione.  $B_r(x)$  è la bolla chiusa in  $\mathbb{R}^n$  centrata in  $x$  avente raggio  $r$ .

Consideriamo un aperto limitato  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  (con bordo liscio) e chiamiamo *Lagrangiana* una funzione liscia  $L$  tale che

$$L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$$

e scriveremo

$$L = L(p, z, x) = L(p_1, \dots, p_n, z, x_1, \dots, x_n) \quad p \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R} \text{ e } x \in \bar{U}.$$

DEFINIZIONE 1. Diciamo che  $L$  è *Lagrangiana nulla* se per ogni  $u : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $u \in C^2(\bar{U})$  vale

$$-\sum_{i=1}^n (L_{p_i}(Du, u, x))_{x_i} + L_z(Du, u, x) = 0 \quad \text{in } U.$$

LEMMA 2 (Lagrangiane nulle e condizioni al bordo). *Sia  $L$  una Lagrangiana nulla. Assumiamo che  $u$  e  $\bar{u}$  siano due funzioni  $C^2(\bar{U})$  tali che*

$$u \equiv \bar{u} \quad \text{su } \partial U.$$

Allora

$$I[u] = I[\bar{u}],$$

dove

$$I[w] := \int_U L(Dw, w, x).$$

*Dimostrazione.* Definiamo

$$i(\tau) := I[\tau u + (1 - \tau)\bar{u}] \quad (0 \leq \tau \leq 1).$$

Passando la derivata sotto segno di integrale, avendo dominio limitato e funzioni regolari, vale

$$\begin{aligned} i'(\tau) &= \int_U \sum_{i=1}^n L_{p_i}(\tau Du + (1 - \tau)D\bar{u}, \tau u + (1 - \tau)\bar{u}, x)(u_{x_i} - \bar{u}_{x_i}) \\ &\quad + \int_U L_z(\tau Du + (1 - \tau)D\bar{u}, \tau u + (1 - \tau)\bar{u}, x)(u - \bar{u}) \\ &= \int_U \left[ - \sum_{i=1}^n (L_{p_i}(\tau Du + (1 - \tau)D\bar{u}, \tau u + (1 - \tau)\bar{u}, x))_{x_i} \right. \\ &\quad \left. + L_z(\tau Du + (1 - \tau)D\bar{u}, \tau u + (1 - \tau)\bar{u}, x) \right] (u - \bar{u}) = 0 \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si usa integrazione per parti e il fatto che  $u$  e  $\bar{u}$  coincidono sul bordo di  $U$ . Di conseguenza  $I[u] = i(0) = i(1) = I[\bar{u}]$ .  $\square$

Lo stesso risultato vale anche se consideriamo funzioni a valori vettoriali e quindi Lagrangiane  $L$  del tipo

$$L : \mathbb{M}^{m \times n} \times \mathbb{R}^m \times \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$$

dove  $\mathbb{M}^{m \times n}$  è lo spazio delle  $m \times n$  matrici reali.

Segui un teorema di cui omettiamo la dimostrazione per non appesantire la trattazione.

TEOREMA 3 (Il determinante è Lagrangiana nulla). *La funzione determinante*

$$L(P) = \det P \quad (P \in \mathbb{M}^{n \times n})$$

*è Lagrangiana nulla.*

Diamo ora una dimostrazione analitica di un classico risultato di punto fisso.

TEOREMA 4 (Punto fisso di Brouwer). *Ogni applicazione continua*

$$f : B_1(0) \rightarrow B_1(0)$$

*ammette almeno un punto fisso. Ovvero, esiste  $x \in B_1(0)$  tale per cui  $f(x) = x$ .*

*Dimostrazione.*



1. Chiamiamo  $B := B_1(0)$ . Prima di tutto dimostriamo che non esiste una funzione liscia

$$w : B \rightarrow \partial B \quad (1)$$

tale che

$$w(x) = x \quad \text{per ogni } x \in \partial B \quad (2)$$

Supponiamo per assurdo che tale  $w$  esista. Chiamiamo  $i$  la funzione identità da  $B$  in se stessa. Essendo che per ipotesi  $w = i$  su  $\partial B$ , considerando che il determinante è una Lagrangiana nulla, il teorema precedente implica che

$$\int_B \det Dw = \int_B \det Di = |B| \neq 0. \quad (3)$$

D'altra parte però, ho che  $|w|^2 \equiv 1$ , quindi derivando otteniamo

$$(Dw)^T w = 0.$$

Essendo che  $|w| = 1$ , la relazione precedente mi dice che 0 è autovalore di  $Dw^T$  per ogni  $x \in B$ . Di conseguenza  $\det Dw \equiv 0$  in  $B$  ma questo contraddice (3). Quindi non esiste alcuna funzione liscia che soddisfa (1) e (2).

2. Ora, dimostriamo che non esiste alcuna funzione continua  $w$  che verifica (1) e (2). Procediamo ancora per assurdo. Se una tale  $w$  esistesse, la estendiamo con continuità imponendo  $w(x) = x$  se  $x \in \mathbb{R}^n \setminus B$ . Si osservi che  $w(x) \neq 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ . Per la (uniforme) continuità di  $w$  è possibile fissare  $\varepsilon > 0$  sufficientemente piccolo tale che la convoluzione  $w_1 := \eta_\varepsilon * w$  è tale per cui  $w_1(x) \neq 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ . Infatti, si osservi innanzitutto che  $|w| \geq 1$  e che quindi per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$  esiste  $j \in \{1, \dots, n\}$  tale per cui  $|w^j(x)| \geq 1/n$  in cui  $w_j$  è la  $j$ -esima componente del vettore  $w$ . Di conseguenza, dall'uniforme continuità, abbiamo che esiste  $\delta > 0$  per cui se  $|x - y| \leq \delta$  allora  $|w(x) - w(y)| \leq \frac{1}{2n}$ . Se quindi fissiamo  $\varepsilon = \min\{1/2, \delta\}$  allora si ha che per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$

$$|w_1(x)| \geq \left| \int_B \eta(y) w^j(x - y\varepsilon) \right| \geq \frac{1}{2n} > 0.$$

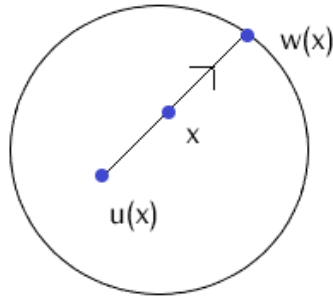
Inoltre, essendo  $\eta$  radiale, si ha che  $w_1(x) = x$  se  $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_2(0)$ . Definiamo allora

$$w_2 := \frac{2w_1}{|w_1|}.$$

$w_2$  è una mappa liscia che soddisfa (1) e (2) (con la bolla  $B_2(0)$  al posto di  $B = B_1(0)$ ), in contraddizione con quanto detto prima.

3. Supponiamo ora che esista per assurdo una mappa  $u : B \rightarrow B$  continua ma senza punti fissi. Si definisca allora la mappa  $w : B \rightarrow \partial B$  imponendo  $w(x)$  come quel punto su  $\partial B$  identificato dalla retta uscente da  $u(x)$  e passante per  $x$ . Questa mappa è ben definita e continua perchè  $u$  non ha punti fissi avente le proprietà (1) e (2). Ma questo contraddice il punto 2.

□



Un'applicazione interessante è il teorema di punto fisso di Schauder che è valido per spazi di Banach.

DEFINIZIONE 5. Sia  $X$  spazio vettoriale e  $\|\cdot\|$  una norma. Diciamo che la coppia  $(X, \|\cdot\|)$  è spazio di Banach se è completo.

DEFINIZIONE 6. Sia  $X$  spazio vettoriale e  $K \subseteq X$  un suo sottoinsieme. Diciamo che  $K$  è convesso se per ogni  $x, y \in K$  e per ogni  $t \in [0, 1]$  si ha

$$tx + (1 - t)y \in K.$$

TEOREMA 7 (Punto fisso di Schauder). Sia  $X$  spazio di Banach e  $K \subset X$  compatto e convesso e sia

$$A : K \rightarrow K$$

continua. Allora  $A$  ha un punto fisso in  $K$ .

OSSERVAZIONE 8. L'ipotesi di convessità e compattezza sono necessarie. Per la prima basta pensare ad una sfera che ruota attorno al suo centro. Per la seconda la traslazione del piano.

*Dimostrazione.* Si fissi  $\varepsilon > 0$  e si scelgano i punti  $u_1, \dots, u_{N_\varepsilon} \in K$  tali che

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} B_\varepsilon(u_i)$$

che esistono per compattezza di  $K$ . Sia  $K_\varepsilon$  l'involucro convesso (simplesso) dei punti  $\{u_1, \dots, u_{N_\varepsilon}\}$

$$K_\varepsilon := \left\{ \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \lambda_i u_i : 0 \leq \lambda_i \leq 1, \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Allora  $K_\varepsilon \subset K$  essendo  $K$  convesso. Ora si definisca  $P_\varepsilon : K \rightarrow K_\varepsilon$  come

$$P_\varepsilon[u] := \frac{\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} d(u, K \setminus B_\varepsilon(u_i)) u_i}{\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} d(u, K \setminus B_\varepsilon(u_i))} \quad u \in K$$

in cui il denominatore non è mai zero essendo che le bolle sono un ricoprimento di  $K$ . Chiaramente  $P_\varepsilon$  è continua e per ogni  $u \in K$  abbiamo

$$\|P_\varepsilon[u] - u\| \leq \frac{\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} d(u, K \setminus B_\varepsilon(u_i)) \|u - u_i\|}{\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} d(u, K \setminus B_\varepsilon(u_i))} \leq \varepsilon. \quad (4)$$

Si consideri ora l'operatore  $A_\varepsilon : K_\varepsilon \rightarrow K_\varepsilon$  definito come

$$A_\varepsilon[u] := P_\varepsilon[A[u]] \quad (u \in K_\varepsilon).$$

Ora, essendo  $K_\varepsilon$  omeomorfa alla bolla chiusa in  $\mathbb{R}^{M_\varepsilon}$  per qualche  $M_\varepsilon \leq N_\varepsilon$ , il punto fisso di Brouwer assicura che esiste un punto fisso  $u_\varepsilon \in K_\varepsilon$  per cui

$$A_\varepsilon[u_\varepsilon] = u_\varepsilon.$$

Essendo  $K$  compatto, esiste una sottosuccessione  $\varepsilon_j \rightarrow 0$  e un punto  $u \in K$  per cui  $u_{\varepsilon_j} \rightarrow u$  in  $X$ . Mostriamo che  $u$  è punto fisso per  $A$ . Infatti, dalla stima (4) otteniamo che

$$\|u_{\varepsilon_j} - A[u_{\varepsilon_j}]\| = \|A_{\varepsilon_j}[u_{\varepsilon_j}] - A[u_{\varepsilon_j}]\| = \|P_{\varepsilon_j}[A[u_{\varepsilon_j}]] - A[u_{\varepsilon_j}]\| \leq \varepsilon_j.$$

Essendo  $A$  continuo concludiamo che  $u = A[u]$ .  $\square$

Ecco che quindi siamo in grado di rispondere alla domanda posta inizialmente. Mantenendo la notazione del teorema precedente e chiamando  $K = \text{“caffè”}$  e  $A = \text{“mescolare”}$  abbiamo il seguente teorema.

**TEOREMA 9.** *Indipendentemente da quanto tempo si dedichi per mischiare il caffè in una tazzina con un cucchiaino ci sarà sempre una molecola che ritornerà nella posizione occupata inizialmente.*

Ecco che quindi la risposta è negativa: non è possibile mischiare completamente il caffè.

**COROLLARIO 10.** *Il teorema precedente si applica anche se si considerano altre bevande.*

Colgo l'occasione per ringraziare tutti gli organizzatori e gli speakers che in questi ultimi 5 anni hanno permesso la realizzazione di Fuori Orario. Questa è infatti la mia ultima edizione e, benchè ci sia sempre un po' di malinconia, sono fiducioso che questa bella iniziativa venga portata avanti e faccia parte delle vite accademiche dei futuri studenti di matematica come lo è stato per me.

## Bibliografia

[E] Evans, Lawrence C. Partial differential equations. Vol. 19. American Mathematical Society, 2022.



# SULLA SOMMA DI QUATTRO QUADRATI

NOEMI GENNUSO

## 1. Introduzione

Durante questo seminario, ci occuperemo di fornire una dimostrazione del seguente fatto, noto anche come teorema dei quattro quadrati di Lagrange:

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x, y, z, w \in \mathbb{N} \text{ t.c. } n = x^2 + y^2 + z^2 + w^2.$$

La dimostrazione seguirà le orme della teoria geometrica dei numeri, in particolare, sarà un corollario del teorema di Minkowski.

## 2. Definizioni e richiami

Sia  $V$  uno spazio vettoriale reale  $m$ -dimensionale ( $m \in \mathbb{N}$ ) e  $B = \{b_1, \dots, b_m\}$  una sua base. Consideriamo su  $V$  la misura  $\mu$  indotta dalla misura di Lebesgue su  $\mathbb{R}^m$  dall'isomorfismo canonico  $V \cong \mathbb{R}^m$ . In particolare,  $\mu$  gode delle seguenti proprietà:  $\forall A, B, A_i \subset V \forall a \in V \forall L : V \rightarrow V$  lineare

- a)  $A \subset B \Rightarrow \mu(A) < \mu(B)$
- b)  $\mu(\bigsqcup A_i) = \sum \mu(A_i)$
- c)  $\mu(LA + a) = |\det(L)|\mu(A)$

Ricordiamo, inoltre, che la misura di una bolla unitaria  $B$  in  $\mathbb{R}^m$  è

$$\mu(B) = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2} + 1)} \text{ con } \Gamma(t) = (t-1)! \text{ per } t \in \mathbb{N}$$

Il sottogruppo  $\Lambda$  di  $V$

$$\Lambda = \langle b_1, \dots, b_m \rangle_{\mathbb{Z}}$$

(i.e. il sottoinsieme di tutte le combinazioni lineari di  $b_1, \dots, b_m$  a coefficienti in  $\mathbb{Z}$ ) è detto *reticolo (pieno)* di  $V$ . Indichiamo con  $d(\Lambda)$  il *covolume* di  $\Lambda$  definito da

$$d(\Lambda) = |\det(b_1, \dots, b_m)|$$

Si nota che  $d(\Lambda) = \mu(P)$ , dove  $P = \{\sum p_i b_i | p_i \in [0, 1)\}$  è detto *parallelepipedo fondamentale*.

### 3. I teoremi di Blichfeldt e Minkowski

Siano  $V$  uno spazio vettoriale reale  $m$ -dimensionale,  $\Lambda$  un reticolo di  $V$  di covolume  $d(\Lambda)$ ,  $S \subseteq V$  un sottoinsieme misurabile di  $V$  di misura  $\mu(S)$  e  $k \in \mathbb{N}$ .

**TEOREMA 1.** (*Blichfeldt*) Se  $\mu(S) > kd(\Lambda)$ , allora esistono  $x_1, \dots, x_{k+1}$  tali che  $x_i - x_j \in \Lambda$   $\forall i, j \in \{1, \dots, k+1\}$ .

*Dimostrazione.*  $\forall x \in V \exists! u, v$  con  $u \in \Lambda$  e  $v \in P$  tali che  $x = u + v$ . Definiamo  $\forall u \in \Lambda$

$$T(u) = \{v \in P \mid u + v \in S\}$$

da cui segue, per l'unicità di  $u$  e  $v$ , che

$$S = \bigsqcup_{u \in \Lambda} T(u) \stackrel{b)}{\implies} \mu(S) = \sum_{u \in \Lambda} \mu(T(u)).$$

Inoltre,

$$\mu(S) > kd(\Lambda) = k\mu(P)$$

quindi, per pigeonhole

$$\exists v_0 \in P \exists x_1, \dots, x_{k+1} \text{ tali che } v_0 \in T(u_i) \forall i \in \{1, \dots, k+1\}$$

e dalla definizione di  $T(u)$  segue la tesi.  $\square$

**OSSERVAZIONE 2.** Considerando la proiezione canonica

$$\pi : V \rightarrow V/\Lambda \cong P$$

il teorema 1 dice che, se  $\mu(S) > kd(\Lambda)$ , la restrizione  $\pi|_S$  non può essere iniettiva.

**OSSERVAZIONE 3.** Il teorema 1 può essere ampliato al caso  $\mu(S) = kd(\Lambda)$ , richiedendo  $S$  compatto.

Infatti,  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$

$$S_\varepsilon = (1 + \varepsilon)S \supset S \stackrel{a)+hp)}{\implies} \mu(S_\varepsilon) > \mu(S) = kd(\Lambda).$$

La tesi segue applicando il teorema 1 all'insieme  $S_\varepsilon$  e ricordando che  $S = \bigcap S_\varepsilon$  è compatto.

**TEOREMA 4.** (*Minkowski*) Se  $S$  è convesso, simmetrico rispetto a  $O \in V$  e  $\mu(S) > k2^m d(\Lambda)$ , allora esistono  $O, \pm u_1, \dots, \pm u_{k+1} \in S \cap \Lambda$ .

*Dimostrazione.* Sia

$$\underline{S} = \frac{1}{2}S \stackrel{c)+hp)}{\implies} \mu(\underline{S}) = \frac{1}{2^m} \mu(S) > kd(\Lambda).$$

Ovvero, sono soddisfatte le ipotesi del teorema 1 per l'insieme  $\underline{S}$  convesso. Quindi,

$$\exists \frac{1}{2}x_1, \dots, \frac{1}{2}x_{k+1} \in \underline{S} \text{ t.c. } \frac{1}{2}x_i - \frac{1}{2}x_j \in \Lambda \cap S \forall i, j \in \{1, \dots, k+1\}$$

e

$$\left| \left\{ \frac{1}{2}x_i - \frac{1}{2}x_j \right\} \right| = 2k + 3$$

da cui segue la tesi.  $\square$

OSSERVAZIONE 5. Analogamente al teorema 1, anche il teorema 4 può essere ampliato al caso  $\mu(S) = k2^m d(\Lambda)$ , richiedendo  $S$  compatto. La dimostrazione rimane invariata, come corollario del teorema di Blichfeldt nel caso di uguaglianza.

#### 4. Dimostrazione

OSSERVAZIONE 6. È sufficiente dimostrare il risultato di Lagrange solo per i primi  $p \geq 3$ . Infatti:

- Per  $n = 0, 1, 2$  la tesi è ovvia.
- Dati  $h_i, k_j \in \mathbb{N}$  con  $i, j = 1, \dots, 4$ , si verifica (svolgendo i conti)

$$\begin{aligned} & (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + h_4^2)(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2) = \\ & = (h_1k_1 + h_2k_2 + h_3k_3 + h_4k_4)^2 + (h_1k_2 - h_2k_1 + h_3k_4 - h_4k_3)^2 + \\ & \quad + (h_1k_3 - h_3k_1 + h_4k_2 - h_2k_4)^2 + (h_1k_4 - h_4k_1 + h_2k_3 - h_3k_2)^2 \end{aligned}$$

Considerando  $V = \mathbb{R}^4$ , costruiamo un reticolo  $\Lambda$  e un insieme  $S$  in  $V$  a cui poter applicare il teorema di Minkowski.

Siano  $\alpha, \beta \in \left\{0, \dots, \frac{p-1}{2}\right\}$  t.c.  $\alpha^2 + \beta^2 + 1 \equiv_p 0$ . L'esistenza di  $\alpha$  e  $\beta$  segue, per pigeonhole, considerando i sottoinsiemi di  $\mathbb{Z}_p$

$$A = \left\{a^2 \pmod p \mid a \in \left\{0, \dots, \frac{p-1}{2}\right\}\right\} \text{ e } B = \left\{-1 - b^2 \pmod p \mid b \in \left\{0, \dots, \frac{p-1}{2}\right\}\right\}$$

di cardinalità  $|A| = |B| = \frac{p+1}{2}$ .

Definiamo il reticolo

$$\Lambda = \left\langle \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{Z}} =$$

$$= \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathbb{Z}^4 \mid x_1 \equiv_p \alpha x_3 + \beta x_4, x_2 \equiv_p \beta x_3 - \alpha x_4\}$$

di covolume  $d(\Lambda) = p^2$  e l'insieme

$$S = B_{\sqrt{2p}}(O)$$

ovvero la bolla centrata nell'origine  $O$  di raggio  $\sqrt{2p}$ , di misura

$$\mu(S) = \frac{\pi^2}{2} \sqrt{2p}^4 = 2\pi^2 p^2 > 2^4 p^2 = 2^4 d(\Lambda).$$

Per il teorema di Minkowski, esiste  $(x, y, z, w) \in (S \cap \Lambda) \setminus \{O\}$ . Quindi, dall'appartenenza a  $S$ ,

$$0 < x^2 + y^2 + z^2 + w^2 < 2p$$

dall'appartenenza a  $\Lambda$ ,

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \equiv_p (\alpha z + \beta w)^2 + (\beta z - \alpha w)^2 + z^2 + w^2 \equiv_p (\alpha^2 + \beta^2 + 1)(z^2 + w^2).$$

Dalla definizione di  $\alpha$  e  $\beta$  e da quanto appena osservato,

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \equiv_p 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = p$$

## 5. Commenti

La dimostrazione del teorema di Lagrange, fornisce una dimostrazione alternativa (rispetto a quella del corso di Algebra 1) a

$$\forall p \equiv_4 1 \text{ primo } \exists x, y \in \mathbb{N} \text{ tali che } p = x^2 + y^2$$

(provare per credere!).

Inoltre, il teorema dei quattro quadrati di Lagrange risolve un caso particolare del problema di Waring, che consiste nel trovare (se esiste) per ogni  $h \in \mathbb{N}$  il più piccolo  $s := g(h) \in \mathbb{N}$  che soddisfa

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_1, \dots, x_s \in \mathbb{N} \text{ t.c. } n = x_1^h + \dots + x_s^h.$$

Abbiamo quindi dimostrato che  $g(2) = 4$  (per la minimalità è immediato notare che, ad esempio, 7 non è scrivibile come somma di due o tre quadrati). In generale, l'uguaglianza  $g(h) = 2^h + \lfloor (3/2)^h \rfloor - 2$  per ogni  $h$  è ancora una congettura (dimostrata solo per un numero finito di  $h$  con  $h$  abbastanza grande...vi invito a curiosare in [o]).

## Bibliografia

- [C] J.W.S. Cassels *An Introduction to the Geometry of Numbers*  
 [M] J.S. Milne *Algebraic Number Theory*  
 [o] <https://oeis.org/A002804>



# IL PROBLEMA DI PLATEAU: BOLLE DI SAPONE E SUPERFICI MINIME

ALESSANDRO SCAPIN

## 1. Introduzione

Nel '700 il matematico Lagrange si pose una domanda: fissata una curva chiusa  $\gamma$  nello spazio tridimensionale  $\mathbb{R}^3$  e introdotta  $\mathcal{F}$  la famiglia delle superfici  $M$  aventi come bordo  $\gamma$ , qual è, se esiste, quell'elemento di  $\mathcal{F}$  avente area minima? Ossia, indicando con  $A$  l'area,

$$\exists \min_{M \in \mathcal{F}} A(M)?$$

Al tempo, la geometria differenziale non era ancora molto sviluppata, quindi Lagrange studiò unicamente quelle superfici che si scrivono come grafici di funzioni. In alcuni casi specifici, riuscì a darsi una risposta; ad esempio, fissando come curva una coppia di cerchi uguali, coassiali e posti a breve distanza l'uno dall'altro, introdusse la *catenoide* (vedi figura sotto), che è la superficie ottenuta dalla rotazione intorno all'asse verticale della *catenaria*, che è essenzialmente una funzione coseno iperbolico. Approcciando questo problema, Lagrange di fatto introdusse per la prima volta quello che oggi chiamiamo *calcolo delle variazioni*.

Successivamente, anche il fisico Plateau si interessò al problema, stavolta da un punto di vista sperimentale. Plateau inserì dei fili di ferro molto sottili (l'equivalente delle curve chiuse) in acqua saponata e, estraendoli con cautela, osservò la formazione di particolari superfici. Da queste osservazioni, congetturò che queste dovessero essere delle superfici di area minima, nel senso che erano quelle superfici che minimizzavano l'area tra tutte quelle aventi come bordo quel filo di ferro. Inoltre, Plateau ritrovò diverse delle superfici studiate precedentemente da Lagrange, confermando la validità dei suoi studi. Per questa ragione, questi oggetti sono chiamati *superfici minime*.

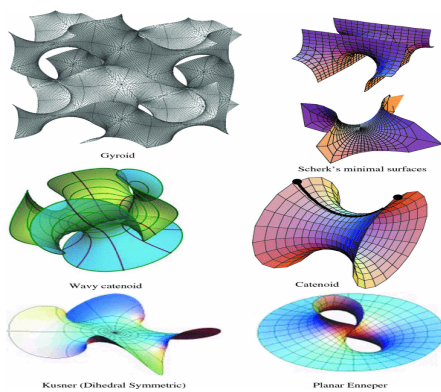
Ma perché tutto ciò accade? La ragione è un principio fisico, detto di energia minima. Secondo questo principio, un sistema fisico può esistere in una determinata configurazione solo se esso non può evolvere verso una configurazione a minore contenuto energetico.

E perché studiare le superfici minime?

(1) Rappresentano le "configurazioni naturali" di diversi fenomeni naturali;



- (2) Sono "comode". Ad esempio, un architetto tedesco di nome Otto Frei utilizzò le superfici minime per ottimizzare costi e spazi. Per citare un caso interessante, realizzò le coperture dello stadio olimpico di Monaco di Baviera in questo modo.



(A) Esempi di superfici minime



(B) Olympiastadion

## 2. Grafici Minimi

Proviamo ora a ripercorrere alcune delle considerazioni di Lagrange; siano  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un aperto connesso,  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^\infty(\Omega)$  e  $\text{Graph } u = \{(x, u(x)) \in \mathbb{R}^{n+1}\}$  il suo grafico. Cosa significa chiedere che  $\text{Graph } u$  sia minimo dell'area? Per ogni possibile  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$  (funzione a supporto compatto), deve valere che

$$A(\text{Graph}(u + \varphi)) \geq A(\text{Graph } u),$$

dove  $A$  denota l'area, ossia la misura di Hausdorff  $n$ -dimensionale. Infatti, questo significa confrontare l'area del grafico di  $u$  con l'area di ogni altro possibile grafico avente lo stesso bordo, in quanto  $\varphi$  ha supporto compatto.

Una condizione necessaria affinché ciò valga, è che

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} A(\text{Graph}(u + t\varphi)) = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \quad (1)$$

Esplicitando la relazione (1) utilizzando la formula dell'area, si vede che equivale a chiedere

$$\text{div} \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0. \quad (2)$$

Ricordiamo che la divergenza di un campo vettoriale  $F = (F_1, \dots, F_n)$  è definita da

$$\text{div } F = \partial_{x_1} F_1 + \dots + \partial_{x_n} F_n.$$

In dimensione  $n = 2$ , l'equazione (2) si scrive come

$$(1 + u_y^2)u_{xx} + (1 + u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} = 0. \quad (3)$$

Studiando questa equazione alle derivate parziali, possiamo cercare superfici di area minima; è quindi chiaro lo stretto legame presente tra le proprietà geometriche e analitiche di questi oggetti. Sebbene la condizione (2) rappresenti, a priori, solo una condizione necessaria affinché il grafico sia minimo, si può dimostrare che è anche sufficiente. In altre parole, per questo particolare problema, la stazionarietà implica la minimalità (locale). Come vedremo successivamente, questo è in generale falso.

Sfruttando la minimalità dei grafici, all'inizio dello scorso secolo, Bernstein provò il seguente

**TEOREMA.** *Sia  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  soluzione di (3). Allora esistono  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tali che  $u = ax + by + c$ , ossia  $\text{Graph } u$  è un piano affine.*

La richiesta di dimensione 2 non è messa per comodità, ma è fondamentale ai fini della dimostrazione. Euristicamente, il significato di questo teorema è semplice: infatti, per unire "punti lontani" è più efficiente usare un piano, che è piatto, rispetto ad una qualche superficie dotata di curvatura. Risulta interessante capire se lo stesso valga anche per dimensioni superiori; torneremo su questo alla fine della presentazione.

### 3. Superfici Minime in varietà Riemanniane

Quanto fatto per i grafici può essere generalizzato a varietà Riemanniane. Sia  $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$  una varietà Riemanniana di dimensione  $n$ ; una variazione a supporto compatto di  $M$  è una funzione  $F : M \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  tale che  $F(\cdot, 0) = id$ ,  $F(\cdot, t) \in C^\infty$  e  $F(m, t) = m \forall m \in \partial M$ . Calcolando la variazione prima del funzionale, ossia imponendo, analogamente al caso dei grafici,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} A(F_t(M)) = 0 \forall F, \quad (4)$$

è possibile osservare che i punti critici del funzionale sono le varietà aventi  $H = 0$ , dove  $H$  è la *curvatura media* di  $M$ . Supponendo per semplicità che la varietà abbia dimensione 2, in ogni punto possiamo individuare due direzioni di curvatura di  $M$ ; la curvatura media indica proprio la media di queste quantità. Una superficie avente  $H = 0$  è detta *superficie minima*.

A differenza dei grafici, in generale non è vero che ogni punto critico dell'area sia anche un minimo locale. La condizione di minimalità locale, detta anche *stabilità*, si può studiare calcolando la derivata seconda del funzionale in (4) e risulta essere

$$\int_M |A_M|^2 \varphi^2 \leq \int_M |\nabla \varphi|^2 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty,$$

dove  $A_M$  indica la *seconda forma fondamentale*. Senza voler in alcun modo essere esaustivi, diciamo che data una varietà  $M$  immersa in una varietà  $N$ , la seconda forma fondamentale indica quanto  $M$  sia curva rispetto a  $N$ .

Vorremmo sfruttare questa introduzione per discutere di un "problema" legato alle dimensioni: per ovvie ragioni, noi matematici pensiamo solamente in dimensione 2 e 3 e spesso, per visualizzare meglio un problema, facciamo dei disegni, convincendoci della validità o meno di qualcosa in base a tali rappresentazioni. Ecco, purtroppo questo può trarci in inganno.

Definiamo *cono* un insieme  $C \subset \mathbb{R}^{n+1}$  tale che  $\lambda C = C$  per ogni  $\lambda > 0$ , ossia un insieme invariante per dilatazioni positive. Chiari esempi sono i "coni gelato" oppure i piani. Facendo dei disegni, uno potrebbe pensare che gli unici coni minimi stabili possano essere i piani, ma negli anni '60 Simons mostrò il seguente

**TEOREMA.** *Siano  $n \leq 7$  e  $C$  un cono minimo stabile di dimensione  $n$ . Allora  $C$  è un piano.*

Il "problema" è che nello stesso articolo egli mostrò anche che per dimensioni più alte questo non è più vero, esibendone un controesempio. Il cono  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 : |x| = |y|\}$ , che sarebbe l'equivalente in dimensione 8 di una croce, è minimo stabile, ma chiaramente non un piano. Inoltre, con ragionamenti analoghi mostrò anche che il Teorema di Bernstein (che abbiamo discusso nella sezione precedente) fallisce in dimensione alta. Insomma, bisogna quindi essere sempre molto attenti alla dimensione del problema!

# CAMMINANDO SULLE MATRICI

SARA DONÈ E DANTE ZAMPOLINI

## 1. Prefazione

In questo seminario discuteremo delle proprietà topologiche di alcuni gruppi di Lie (sottogruppi classici di matrici), con particolare attenzione al gruppo fondamentale.

## 2. Definizioni e Esempi

*Gruppi Classici: Sottogruppi di Matrici di Lie*

- $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$
- $GL_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \det(A) \neq 0\}$ 
  - osserviamo la seguente corrispondenza:  
$$\forall z \in \mathbb{R}z = a + ib \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$
- $O(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid AA^T = I_n\}$  rot di una base ortonormale in  $\mathbb{R}^n$ 
  - $\det(A)\det(A^T) = \det^2(A) = 1 \iff \det(A) = \pm 1$
- $U(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}) \mid AA^* = I_n, A^* = \bar{A}^T\}$ 
  - $\det(A)\det(A^T) = \|\det(A)\| = 1$
- $SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det(A) = 1\}$  rot di una base pos orientata
- $SU(n) = \{A \in U(n) \mid \det(A) = 1\}$

ESEMPIO 1.  $n = 1$

- $O(1) = \{1, -1\}$
- $SO(1) = \{1\}$
- $U(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\} \simeq S^1$
- $SU(1) = \{1\}$

ESEMPIO 2.  $n = 2$

- $O(2) = \{A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid AA^T = I_n\}$ 
  - risolvendo il sistema che segue da tale condizione otteniamo che le matrici in

$$O(2) \text{ sono della forma: } A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \mp \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \pm \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

- $SO(2) = \{A \in O_2 \mid \det(A) = 1\}$ 
  - $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \leftrightarrow \cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta} \Rightarrow SO(2) \simeq S^1$
- $U(2) = \{A \in GL_2(\mathbb{C}) \mid AA^* = I_2, A^* = \bar{A}^T\}$ 
  - $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} & \bar{y} \\ \bar{z} & \bar{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\bar{x} + y\bar{y} & x\bar{z} + y\bar{w} \\ z\bar{x} + w\bar{y} & z\bar{z} + w\bar{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $SU(2) = \{A \in U(2) \mid \det(A) = 1\}$ 
  - risolvendo il sistema che segue da tale condizione otteniamo che le matrici in  $SU(2)$  sono della forma:
 
$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + ib & c + id \\ -c + id & a - ib \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$
 dal determinante otteniamo che  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$   
 $\Rightarrow SU(2) \simeq S^3$

### 3. Connessione

TEOREMA 3.  $GL_n(\mathbb{R}) \simeq O(n) \times S(n)$ , dove  $S(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ symm def pos}\}$

*Dimostrazione.* Per ogni matrice invertibile  $X \in GL_n(\mathbb{R})$  esiste un'unica matrice  $A \in O(n)$ , ed un'unica matrice  $B \in S(n)$  tc  $X = AB$ . Questa è la decomposizione polare.  
 $\Rightarrow$  la mappa  $\phi : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow O(n) \times S(n)$ ,  $AB \mapsto (A, B)$  è continua, biettiva e ha inversa continua.  $\square$

OSSERVAZIONE 4.  $S(n)$  convesso  $\Rightarrow \pi_1(GL_n(\mathbb{R})) = \pi_1(O(n))$

TEOREMA 5.  $O(n) \simeq SO(n) \times \mathbb{Z}_2$ , Dove intendiamo  $\mathbb{Z}_2$  come  $\{1, -1\}$  con la top discreta.

*Dimostrazione.* sia  $\phi : O_n(\mathbb{R}) \rightarrow SO(n) \times \mathbb{Z}_2$ ,  $A \mapsto (\det(A) * A, \det(A))$ , dove l'operazione  $*$  moltiplica solo l'ultima colonna.

La mappa è ben definita:

- $\det(\det(A)A) = \det^2(A) = 1 \Rightarrow \in SO(n)$
- $\det(A) = \pm 1 \Rightarrow \in \mathbb{Z}_2$

Inoltre la mappa è biettiva, continua e ha inversa continua.  $\square$

OSSERVAZIONE 6. Per ogni  $u, v \in S^{n-1}$  esiste una matrice  $M \in SO(n)$  che trasforma  $u$  in  $v$  tramite una rotazione.

*Dimostrazione.*  $\forall u, v \in S^{n-1} \exists w \in \text{Span}(u, v)$  tc  $u \perp v$ .

Completo una base  $\{u, w, l_3, \dots, l_n\}$ .

$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & & \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & & \\ & & I_{n-2} & \end{pmatrix}$  è la matrice di rotazione che porta  $v$  in  $u$ .

Mettendo  $t\theta$  al posto di  $\theta$  definiamo il cammino che descrive la rotazione da  $u$  verso  $v$ .  $\square$

TEOREMA 7.  $SO(n)$  è connesso

*Dimostrazione.* Sia  $M \in SO(n)$ , le sue colonne definiscono una base  $\{a_1, \dots, a_n\}$  positivamente orientata.

- passo 1: Ruoto  $\{a_1, \dots, a_n\}$  tramite  $\begin{pmatrix} \cos(t\theta) & -\sin(t\theta) & & \\ \sin(t\theta) & \cos(t\theta) & & \\ & & & \\ & & & I_{n-2} \end{pmatrix}$   
e ottengo  $\{e_1, \lambda_2 a_2, \dots, \lambda_n a_n\}$ .
- passo 2: Ruoto  $\{e_1, \lambda_2 a_2, \dots, \lambda_n a_n\}$  tramite  $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos(t\theta) & -\sin(t\theta) & \\ & \sin(t\theta) & \cos(t\theta) & \\ & & & I_{n-3} \end{pmatrix}$   
e ottengo  $\{e_1, e_2, \alpha_3 a_3, \dots, \alpha_n a_n\}$ .
- ...
- passo n: Ruoto con  $\begin{pmatrix} I_{n-2} & & \\ & \cos(t\theta) & -\sin(t\theta) \\ & \sin(t\theta) & \cos(t\theta) \end{pmatrix}$  e ottengo  $\{e_1, \dots, e_n\}$ .

E' quindi possibile ruotare la base iniziale in modo continuo fino al raggiungimento della base canonica. Queste rotazioni corrispondono a una successione finita di cammini, la cui somma porta  $M$  in  $I_n \Rightarrow SO(n)$  è connesso.  $\square$

TEOREMA 8.  $GL_n(\mathbb{C})$  è connesso

*Dimostrazione.* Sia  $A \in GL_n(\mathbb{C})$ . Per Jordan nei complessi  $\exists M \in GL_n(\mathbb{C})$  tc  $J = MAM^{-1}$ .

$J$  in forma canonica di Jordan è  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & & \\ & \dots & 1 & & \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \dots & \\ & & & & \lambda_n & 1 \\ & & & & & \dots & 1 \\ & & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

se prendo il cammino  $\gamma: t \mapsto \begin{pmatrix} t\lambda_1 + (1-t) & 1-t & & & \\ & \dots & 1-t & & \\ & & & \dots & \\ & & & & 1-t \\ & & & & t\lambda_1 + (1-t) & & \\ & & & & & & \dots \end{pmatrix}$

Ottengo un cammino che mi ruota la matrice in forma canonica di Jordan fino a raggiungere l'identità. Il prodotto di matrici è una operazione lineare, continua  $\Rightarrow$  ho un cammino continuo che mi manda  $A$  in  $I_n$ .  $\square$

#### 4. Rivestimento

DEFINIZIONE 9. Dato  $(X, \tau_X), (E, \tau_E)$  definisco rivestimento di  $X$  una mappa  $\rho: (E, \tau_E) \rightarrow (X, \tau_X)$  continua, suriettiva, tc:

- $\forall x \in X \rho^{-1}(x)$  è un insieme discreto (i.e. la topologia indotta è quella discreta).
- $\rho$  è omeo locale:  $\forall x \in E \exists A \in I(x), B \in I(\rho(x))$  aperti tc  $f: A \rightarrow B$  sia omeo.

- $\tau_X = \tau_\rho$ .

ESEMPIO 10.  $\mathbb{R}$  è rivestimento di  $S^1$ .  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow S^1, x \mapsto e^{ix}$ .

DEFINIZIONE 11.  $\rho, E$  è rivestimento universale se  $\rho$  è rivestimento ed  $E$  è semplicemente connesso.

TEOREMA 12 (Esistenza del rivestimento universale). se:

- $X$  è connesso
- $X$  è localmente connesso per archi
- $X$  è localmente semplicemente connesso

$\Rightarrow \exists$  rivestimento universale

TEOREMA 13 (Esistenza e unicità del sollevamento). Dato  $\rho : E \rightarrow X$  rivestimento,  $x_0 \in X, q_0 \in \rho^{-1}$

$\Rightarrow$  per ogni funzione  $f : Y \rightarrow E$  continua con  $Y$  connesso, fissato  $y_0$  tc  $f(y_0) = q_0$ , esiste un'unica funzione  $g : Y \rightarrow E$  continua tc  $g^{-1}(y_0) = q_0$  e  $\rho \circ g = f$

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ & \nearrow g & \downarrow \rho \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

TEOREMA 14. Il rivestimento universale, se esiste, è unico.

i.e.  $\rho_1 : E_1 \rightarrow X, \rho_2 : E_2 \rightarrow X \Rightarrow E_1 \simeq E_2$

Dimostrazione.

$$\begin{array}{ccc} E_2 & \longleftrightarrow & E_1 \\ & \searrow \rho_2 & \swarrow \rho_1 \\ & X & \end{array}$$

$f_1 : E_1 \rightarrow E_2$  è il sollevamento di  $\rho_1$ .  $f_2 : E_2 \rightarrow E_1$  è il sollevamento di  $\rho_2$ . Il grafico commuta, e  $f_1$  e  $f_2$  sono una l'inversa dell'altra.

$\Rightarrow f_1$  e  $f_2$  sono omeo  $\Rightarrow$  se esiste il rivestimento è unico □

TEOREMA 15 (Kirillov). Dato  $G$  gruppo di Lie connesso  $\Rightarrow$

- $\tilde{G}$  rivestimento universale canonico di  $G$  è gruppo di Lie
- $\rho : \tilde{G} \rightarrow G$  è morfismo di gruppo di Lie
- $\text{Ker}(\rho) \simeq \pi_1(G)$

TEOREMA 16.  $SU(2)$  copre 2 volte  $SO(3)$

Dimostrazione. Ricordiamo che  $SU(2) \simeq S^3$  e che  $GL(k)$  è gruppo aut inv  $\Rightarrow SU(2) \simeq S^3 \subseteq \mathbb{H}$  gruppo dei quaternioni.

Consideriamo  $\mathbb{H}_0 := 0 + ib + jc + kd \leftrightarrow \mathbb{R}^3$ . Definisco una norma su  $\mathbb{H}_0$  come  $\langle, \rangle : \mathbb{H}_0 \times \mathbb{H}_0 \rightarrow \mathbb{R}^3, (q, r) \mapsto q\bar{r}$ . Ottengo un iso di spazi vettoriali normati tra  $(\mathbb{H}_0, \langle, \rangle)$  e  $(\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$ .

Prendiamo poi  $\phi : SU(2) \rightarrow GL(\mathbb{H}_0) \simeq GL(\mathbb{R}^3) \simeq GL_3(\mathbb{R})$ , dove  $\phi(A) = t_A$ , e

$t_A : \mathbb{H}_0 \rightarrow \mathbb{R}, q \mapsto AqA^{-1}$ .  $t_A$  ha le seguenti proprietà:

- è lineare:



- $\lambda t_A(q) = \lambda AqA^{-1} = A(\lambda q)A^{-1} = t_A(\lambda q)$
- $t_A(p + q) = A(p + q)A^{-1} = ApA^{-1} + AqA^{-1} = t_A(p) + t_A(q)$
- preserva la norma su  $\mathbb{H}_0$  :
  - $\langle t_A(q), t_A(p) \rangle = AqA^{-1}ApA^{-1} = AqA^{-1}A^{-1T}pA^{-1T} = Aq\bar{p}\bar{A}^T =$
  - $= -qA(-\bar{A}^T\bar{p}) = q\bar{p} = \langle q, p \rangle$

$\Rightarrow t_A \in O(3)$ , ma  $SU(3)$  connesso  $\Rightarrow Im(\phi) = SO(3) \Rightarrow Ker(\phi) = \pm I_3$  □

**COROLLARIO 17.**  $SU(2) \simeq S^3 \Rightarrow$  semplicemente connesso  $\Rightarrow$  è rivestimento universale di  $SO(3)$ , con mappa  $\rho : SU(2) \rightarrow SO(3) \Rightarrow \pi_1(SO(3)) = Ker(\rho) = \mathbb{Z}_2$

**TEOREMA 18.** Per  $n \geq 3$  si ha che  $\frac{SO(n+1)}{SO(n)} \simeq S^n$  e che  $\frac{SU(n)}{SU(n-1)} \simeq S^{2n-1}$  (analogo per  $U(n)$ )

*Dimostrazione.*  $SO(n + 1)$  agisce in maniera transitiva su  $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ :

sia  $\varphi_v : SO(n + 1) \rightarrow S^n, A \mapsto Av$  mappa continua, inoltre  $\{stab \text{ di } v = (1, 0, \dots, 0)\} \simeq$

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & SO(n-1) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$  per il teorema dell'orbita-stabilizzatore la mappa  $\frac{SO(n+1)}{SO(n)} \xrightarrow{\varphi_v} S^n$  è biettiva;

ma  $SO(n + 1)$  è compatto e  $SO(n)$  è chiuso  $\Rightarrow \frac{SO(n+1)}{SO(n)}$  è compatto. Inoltre  $S^n \cong T_2 \Rightarrow \frac{SO(n+1)}{SO(n)} \simeq S^n$

Dimostrazione analoga per il caso complesso. □

### 5. Sequenze Esatte

**DEFINIZIONE 19.** Una sequenza esatta è una successione di gruppi  $\{G_i\}$  e di omo di gruppi  $\{f_i : G_i \rightarrow G_{i+1}\}$  tc  $\forall n Im(f_n) = Ker(f_{n+1})$

Scrivo:  $1 \longrightarrow G_1 \xrightarrow{f_1} G_2 \xrightarrow{f_2} G_3 \dots \longrightarrow 1$

**ESEMPIO 20.** Vediamo cosa succede con omo di gruppi iniettivi e suriettivi:

- sia  $f : G \rightarrow H$  omo di gruppi iniettivo, allora induce una sequenza esatta corta:

$$1 \longrightarrow G \xrightarrow{f} H \xrightarrow{\pi} \frac{H}{f(G)} \longrightarrow 1$$

- sia  $f : G \rightarrow H$  omo di gruppi suriettivo, allora induce una sequenza esatta corta:

$$1 \longrightarrow Ker(f) \xrightarrow{i} G \xrightarrow{f} H \longrightarrow 1$$

**OSSERVAZIONE 21.**  $SO(n) \xrightarrow{i} SO(n + 1)$  è immersione omo di gruppi.

**TEOREMA 22.** Dato un gruppo di Lie compatto  $G$ , se  $H$  sgr  $\Rightarrow H$  chiuso  $\Rightarrow$

- $\rho : G \rightarrow \frac{G}{H}$  è una fibrazione
- Esiste una sequenza esatta lunga di gruppi di omotopia:

$$\pi_n(H) \longrightarrow \pi_n(G) \longrightarrow \pi_n\left(\frac{G}{H}\right) \longrightarrow \pi_{n-1}(G) \longrightarrow \dots$$

- $1 \hookrightarrow H \hookrightarrow G \hookrightarrow \frac{G}{H} \hookrightarrow 1$   
 $\{1\} \hookrightarrow \pi_1(H) \hookrightarrow \pi_1(G) \hookrightarrow \pi_1\left(\frac{G}{H}\right) \hookrightarrow \{1\}$   
 sono sequenze esatte.

COROLLARIO 23. Data la sequenza esatta:

$$1 \hookrightarrow SO(n) \hookrightarrow SO(n+1) \hookrightarrow \frac{SO(n)}{SO(n+1)} \hookrightarrow 1 \Rightarrow$$

$$\{1\} \rightarrow \pi_1(SO(n)) \rightarrow \pi_1(SO(n+1)) \rightarrow \pi_1\left(\frac{SO(n+1)}{SO(n)}\right) \rightarrow \pi_1(S^n) = 1$$

è esatta  $\Rightarrow \pi_1(SO(n)) = \pi_1(SO(n+1))$

OSSERVAZIONE 24. Analogamente:

- $SU(n-1) \xrightarrow{i} SU(n)$  è immersione omo di gruppi
- $1 \hookrightarrow SU(n-1) \hookrightarrow SU(n) \hookrightarrow \frac{SU(n)}{SU(n-1)} \hookrightarrow 1$
- $\{1\} \rightarrow \pi_1(SU(n-1)) \rightarrow \pi_1(SU(n)) \rightarrow \pi_1\left(\frac{SU(n)}{SU(n-1)}\right) \rightarrow \pi_1(S^{2n-1}) = 1$
- $\pi_1(SO(2)) = \pi_1(U(n)) = \mathbb{Z}$

## 6. Ricapitolando

Gruppo	$O(1), SO(1)$	$O(2), SO(2)$	$O(n), SO(n)$	$U(n)$	$SU(n)$
$\pi_1$	$\{1\}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	$\{1\}$

TABELLA 1. *Gruppi Fondamentali*

## Bibliografia

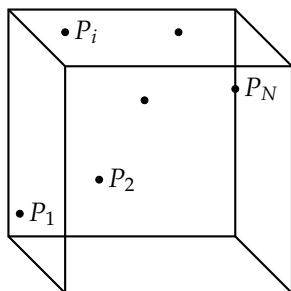
- An introduction to Lie Groups and Lie Algebras, Alexander Kirillov.
- Appunti su gruppi classici.

# SPAZI DI FOCK: LA MATEMATICA DIETRO LA TEORIA QUANTISTICA DEI CAMPI

MATTIA BELLONI

## 1. Introduzione

Consideriamo un gas di  $N \approx N_A \approx 10^{24}$  particelle quantistiche (i.e. un gas di bosoni o di fermioni) all'interno di un volume  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  che supponiamo misurabile secondo Lebesgue e la cui frontiera  $\partial\Omega$  sia sufficientemente regolare tale da permettere l'applicazione del teorema della divergenza (e.g. lipschitziano).



L'obiettivo della meccanica statistica quantistica è quello di trovare una funzione  $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$  che mi descriva come cambia la configurazione del gas nel tempo.

**Obiettivo:** Scoprire in quale spazio funzionale "vive" la funzione  $\Psi$ .

Mostreremo che  $\Psi$  vive negli spazi di Fock, cioè:  $\Psi \in \mathcal{F}_\varepsilon$  dove:

$$\mathcal{F}_\varepsilon := \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{S}_\varepsilon \bigotimes_{i=0}^N \mathcal{H}^k(\Omega)$$

- $\bigoplus_{N=0}^{\infty}$  è la somma diretta di spazi vettoriali;
- $\bigotimes_{i=0}^N$  indica il prodotto tensore tra spazi vettoriali;

- $\mathcal{S}_\varepsilon$  è l'operatore di simmetrizzazione o antisimmetrizzazione, dipendentemente dal tipo di particelle descritte;
- $\mathcal{H}^k(\Omega)$  è uno spazio di Sobolev hilbertiano.

## 2. Prerequisiti

Qui si seguito richiamo alcuni concetti di meccanica classica e meccanica quantistica utili alla comprensione di questo elaborato.

### 2.1. Meccanica classica

Consideriamo un gas di  $N$  particelle classiche. Per scoprire l'evoluzione temporale di questo gas si risolvono le  $6N$  equazioni di Hamilton  $\forall i = 1, \dots, N$ :

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \quad (1)$$

Con le  $6N$  condizioni iniziali:

$$\begin{cases} p_i(0) = p_{i0} \in \mathbb{R}^3 \\ q_i(0) = q_{i0} \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \quad (2)$$

Allora per il teorema di esistenza e unicità di Cauchy per le equazioni differenziali:

$$\exists! (\vec{p}(t), \vec{q}(t)) \in \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N} \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta], \delta > 0$$

In particolare c'è **determinismo** sulle posizioni e i momenti delle particelle classiche (macroscopiche). Anche sperimentalmente possiamo osservare il nostro punto materiale "guardandolo" o semplicemente illuminandolo al microscopio e questo non perturba (in prima approssimazione) il suo moto, risultando appunto, ben determinato e descritto molto bene dalle equazioni di Hamilton.

### 2.2. Meccanica quantistica

La meccanica quantistica affronta esattamente lo stesso problema, ma in modo completamente diverso. Osserviamo innanzitutto che una qualsiasi misura fatta su un sistema quantistico (e.g. misura dell'energia di una particella, della sua posizione o della sua velocità) perturba il sistema. Questo è quanto è espresso dal seguente:

**PRINCIPIO** (di indeterminazione di Heisenberg). Non è possibile determinare con precisione arbitraria e contemporaneamente due variabili coniugate, ossia non è possibile conoscere con esattezza e contemporaneamente due variabili quali posizione e quantità di moto di una particella.

Matematicamente questo si esprime come:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Osserviamo che non ha quindi senso parlare di posizione e momento associati ad una particella (e quindi anche di traiettoria)!

Intuitivamente possiamo per lo meno conoscere in quali zone è più probabile trovare una particella (e analogamente quali sono le velocità più probabili che essa può assumere).

$\forall i = 1, \dots, N$  si associa allora una funzione:

$$\Psi_i : \Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$$

chiamata **funzione d'onda**.

Una generica funzione  $\Psi$  non ha significato fisico, ma ciò che ha significato fisico è il suo modulo quadro.

$|\Psi(x, y, z, t)|^2$  rappresenta la **densità di probabilità** di trovare la particella nel punto  $p = (x, y, z)^T \in \Omega$  dello spazio, all'istante  $t \geq 0$ .

Assumiamo dunque il seguente:

**ASSIOMA** (della probabilità di una misura). Essendo  $|\Psi|^2$  una densità di probabilità necessariamente deve valere che:

$$\int_{\Omega \subset \mathbb{R}^3} |\Psi(\vec{r}, t)|^2 d\mathbf{r}^3 = 1 \quad (3)$$

e cioè questo si traduce in:  $\Psi|_{t=t_0} \in L^2(\Omega) \forall t_0 \geq 0$ .

Le equazioni del moto che descrivono l'evoluzione temporale di una particella non sono più le equazioni di Hamilton, ma l'evoluzione temporale della funzione d'onda è data dalla risoluzione dell'equazione di Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi \quad (4)$$

dove:

$$\hat{H} : \mathcal{D}(\hat{H}) \rightarrow L^2(\Omega)$$

è l'**operatore hamiltoniano** la cui azione, su una generica funzione test  $\Psi \in \mathcal{D}(\hat{H})$ , è definita come segue:

$$\hat{H}\Psi := -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V\Psi \quad (5)$$

dove  $V$  è un potenziale.

Osserviamo che  $\Psi$  non vive in  $L^2(\Omega)$  ma, in generale vive in un suo sottospazio (il quale rappresenta il suo dominio. Vedremo che  $\Psi$  vive in uno spazio di **Sobolev hilbertiano**, cioè uno spazio con delle proprietà in più rispetto a  $L^2(\Omega)$ ).

Il fatto che la funzione d'onda rimanga normalizzata  $\forall t > 0$  non è banale e va dimostrato.

**PROPOSIZIONE.** Se lo stato  $\Psi$  del sistema si evolve nel tempo obbedendo all'equazione di Schrödinger, la quantità:

$$\|\Psi(\cdot, t)\|_{L^2(\Lambda)}$$

è costante nel tempo.

In particolare, se  $\Psi(\cdot, t)$  è normalizzata all'istante iniziale, rimane normalizzata a tutti i tempi successivi. Ciò mostra che l'equazione di Schrödinger è coerente con l'interpretazione probabilistica della funzione d'onda.

**Dimostrazione.** Calcoliamo:

$$\frac{d}{dt} \|\Psi(\cdot, t)\|_{L^2(\Lambda)}^2$$

e mostriamo che è zero.

$$\frac{d}{dt} \|\Psi(\cdot, t)\|_{L^2(\Lambda)}^2 = \frac{d}{dt} \langle \Psi(\cdot, t), \Psi(\cdot, t) \rangle = \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial t}(\cdot, t), \Psi(\cdot, t) \right\rangle + \left\langle \Psi(\cdot, t), \frac{\partial \Psi}{\partial t}(\cdot, t) \right\rangle$$

in base all'equazione di Schrödinger:

$$= \left\langle -\frac{i}{\hbar} H\Psi(\cdot, t), \Psi(\cdot, t) \right\rangle + \left\langle \Psi(\cdot, t), -\frac{i}{\hbar} H\Psi(\cdot, t) \right\rangle$$

per le proprietà del prodotto scalare:

$$= \frac{i}{\hbar} \langle H\Psi(\cdot, t), \Psi(\cdot, t) \rangle - \frac{i}{\hbar} \langle \Psi(\cdot, t), H\Psi(\cdot, t) \rangle$$

per la simmetria di  $H$ :

$$= \frac{i}{\hbar} \langle H\Psi(\cdot, t), \Psi(\cdot, t) \rangle - \frac{i}{\hbar} \langle H\Psi(\cdot, t), \Psi(\cdot, t) \rangle = 0$$

■

### 2.2.1. Indistinguibilità di particelle.

Infine introduciamo il concetto di **indistinguibilità** tra particelle. In un gas che segue la meccanica (statistica) classica le particelle sono distinguibili, ovvero per fare un esempio, possiamo osservarne una per tutto il suo moto e distinguerla, per l'appunto, dalle altre. A causa del principio di indeterminazione di Heisenberg, in meccanica (statistica) quantistica, particelle identiche non possono essere distinte le une dalle altre e questo ha importanti conseguenze a livello matematico. Vale infatti il seguente:

**ASSIOMA** (indistinguibilità di particelle identiche). Dato un sistema contenente  $N$  particelle fra loro identiche, è impossibile che una misura dia risultati diversi se si immagina di scambiare fra loro due particelle.

Matematicamente questo si formalizza introducendo l'**operatore di scambio**:

$$\mathcal{P}_{kj} : \mathcal{F}_\varepsilon \rightarrow \mathcal{F}_\varepsilon$$

la cui azione su una generica  $\Psi \in \mathcal{F}_\varepsilon$  è:

$$\mathcal{P}_{kj}\Psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_N) = \Psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_k, \dots, \vec{x}_N) \quad (6)$$

cioè  $\mathcal{P}_{kj}$  scambia di posto la  $k$ -esima e la  $j$ -esima particella.

Per l'assioma di indistinguibilità una configurazione spaziale  $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$  e un'altra ottenuta mediante scambi semplici tra le variabili  $(\vec{x}_{\sigma_1}, \dots, \vec{x}_{\sigma_N})$  sono equiprobabili e cioè:

$$|\mathcal{P}_{kj}\Psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_N)|^2 = |\Psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_N)|^2 \quad (7)$$

e cioè:

$$\Psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_N) = \pm \Psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_k, \dots, \vec{x}_N) \quad (8)$$

Usare  $+$  o  $-$  non è una scelta arbitraria e non dipende da specifiche condizioni iniziali, ma dipende se le particelle in esame sono bosoni o fermioni. Vale il seguente teorema di teoria quantistica dei campi relativistica:

**TEOREMA** (Spin-statistica). Tutte le particelle a spin **intero** sono necessariamente **bosoni** e sono rappresentate da funzioni d'onda **simmetriche**, mentre tutte le particelle a spin **semintero** sono necessariamente **fermioni** e sono rappresentate da funzioni d'onda **antisimmetriche**.

### 2.2.2. Bosoni e fermioni.

In fisica, bosoni e fermioni sono due classi fondamentali di particelle elementari che costituiscono la materia e mediano le forze tra le particelle. La distinzione tra bosoni e fermioni è di fondamentale importanza nella comprensione dei fenomeni quantistici e della struttura della materia.

I bosoni sono particelle che seguono le statistiche di Bose-Einstein. Hanno uno spin

intero (0, 1, 2, ...) e obbediscono al principio di indiscernibilità di Bose, il che significa che possono occupare lo stesso stato quantico contemporaneamente. Alcuni esempi di bosoni includono i fotoni (mediatori della forza elettromagnetica), i bosoni W e Z (mediatori della forza nucleare debole) e i bosoni di Higgs.

I fermioni sono particelle che seguono le statistiche di Fermi-Dirac. Hanno uno spin semintero (1/2, 3/2, ...) e obbediscono al principio di esclusione di Pauli, il che significa che non possono occupare lo stesso stato quantico contemporaneamente. Questo principio è alla base della struttura degli atomi e delle proprietà chimiche della materia. Gli esempi di fermioni includono protoni, neutroni, elettroni e quarks.

Per arrivare all'obiettivo finale di questo elaborato procediamo per passi, cercando di capire in quale spazio funzionale vive la funzione d'onda di singola particella, quella di 2 particelle, di  $N$  particelle e alla fine introdurremo in maniera rigorosa gli **spazi di Fock**.

### 3. Funzione d'onda di particella singola

In meccanica quantistica ad ogni quantità osservabile :

$$O : \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$$

cioè ad ogni grandezza fisica (e.g. energia, posizione, momento), è associato un **operatore autoaggiunto** definito tra **spazi di Sobolev hilbertiani**:

$$\hat{O} : \mathcal{D}(\hat{O}) \rightarrow \mathcal{H}$$

Per ottenere una descrizione semplice e naturale del dominio di un operatore differenziale può essere utile tradurre la sua azione in termini di **trasformata di Fourier**. Così facendo non è, però, ovvio che si stia parlando dello stesso operatore.

Per ovviare a questo problema è necessario che esistano tutte le **derivate deboli** della funzione  $\Psi$  che prendiamo in considerazione, cioè richiediamo che esista finito l'integrale:

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\xi}|^{2k} |\mathcal{F}(\Psi(\vec{\xi}, t))|^2 d\xi^3 \quad (9)$$

dove  $k \in \mathbb{N}$  è un indice fissato e:

$$\mathcal{F}(\Psi(\vec{r}, t)) := \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\vec{\xi} \cdot \vec{x}} (\Psi(\vec{r}, t)) d\mathbf{r}^3 \quad (10)$$

rappresenta la trasformata di Fourier della funzione  $\Psi$ . Richiedere che esista finito l'integrale (9) è equivalente a richiedere che  $\forall i = 1, 2, 3$ :

$$\exists \mathcal{F} \left( \frac{\partial^k \Psi}{\partial x_i^k} \right) = (2\pi i \xi_i)^k \mathcal{F}(\Psi) \in L^2(\mathbb{R}^3)$$

avendo usato il teorema della **trasformata della derivata**. La richiesta precedente è proprio la definizione di derivata debole di una funzione. Definiamo allora  $\forall k \in \mathbb{N}$  gli



**spazi di Sobolev:**

$$\mathcal{H}^k(\Omega) := \left\{ \Psi \in L^2(\Omega) \mid |\vec{\xi}|^m \mathcal{F}(\Psi) \in L^2(\mathbb{R}^3) \forall m = 1, \dots, k \right\}$$

i quali muniti del **prodotto scalare** definito come segue:

$$\forall f, g \in \mathcal{H}^k(\Omega) : \langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\mathcal{F}(f)} \mathcal{F}(g) (1 + |\xi|^k)^2 d\xi^3$$

e della **norma indotta**:

$$\forall f \in \mathcal{H}^k(\Omega) : \|f\|_{\mathcal{H}^k(\Omega)} := \int_{\mathbb{R}^3} |\mathcal{F}(f)|^2 (1 + |\xi|^k)^2 d\xi^3$$

risultano anche completi, quindi di **Hilbert**.

**Esempio:** Sia  $\hat{\mathcal{P}} : \mathcal{D}(\hat{\mathcal{P}}) \rightarrow L^2(\Omega)$  l'operatore momento definito come segue:

$$\hat{\mathcal{P}} = -i\hbar \nabla$$

l'obiettivo è capire qual è il suo dominio. Scriviamo, allora, la sua azione in termini di trasformata di Fourier e cioè:

$$\hat{\mathcal{P}}\Psi = \mathcal{F}^{-1}(\hbar|\vec{\xi}|\widehat{\Psi}(\xi))$$

ora è molto più facile comprenderne il dominio. Si ha quindi che:

$$\mathcal{D}(\hat{\mathcal{P}}) = \left\{ \Psi \in L^2(\Omega) : |\vec{\xi}|\mathcal{F}(\Psi)(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^3) \right\}$$

cioè  $\mathcal{D}(\hat{\mathcal{P}}) = \mathcal{H}^1(\Omega)$ .

Concludiamo quindi che, in generale,  $\Psi|_{t=t_0} \in \mathcal{H}^k(\Omega) \forall t_0 \geq 0, k \in \mathbb{N}$  fissato in base al dominio dell'operatore, cioè la funzione d'onda di particella singola "vive" in uno **spazio di Sobolev hilbertiano**.

#### 4. Funzione d'onda di due particelle

Consideriamo **2 bosoni** e **2 fermioni** vincolati sempre da un volume  $\Omega$ . Questo sistema, in generale, è descritto da una funzione d'onda  $\Psi = \Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$  dove  $\vec{x}_i \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$  indica la posizione dell' $i$ -esima particella del sistema.

Dove "vive" la funzione d'onda  $\Psi$ ? La domanda non è così semplice e dipende se le particelle sono entrambe fermioni o bosoni.

Supponiamo di conoscere  $\Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$  e mettiamoci nell'ipotesi di particelle indipendenti. Allora si può mostrare risolvendo l'equazione di Schrödinger che:

$$\Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \Psi_1(\vec{x}_1)\Psi_2(\vec{x}_2)$$

La soluzione finale non è questa e cambia in base a se stiamo considerando 2 fermioni o 2 bosoni:

- **fermioni:**  $\Psi_A(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_1(\vec{x}_1)\Psi_2(\vec{x}_2) - \Psi_1(\vec{x}_2)\Psi_2(\vec{x}_1))$
- **bosoni:**  $\Psi_S(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_1(\vec{x}_1)\Psi_2(\vec{x}_2) + \Psi_1(\vec{x}_2)\Psi_2(\vec{x}_1))$

dove  $\Psi_1$  e  $\Psi_2$  sono le funzioni d'onda di particella singola.

Formalmente queste operazioni di **simmetrizzazione** e **antisimmetrizzazione** sono descritte da cosiddetti **operatori di proiezione** che proiettano uno spazio di Hilbert nel suo sottospazio simmetrico o antisimmetrico:

$$\hat{S} : \mathcal{H}(\Omega) \rightarrow \mathcal{S}\mathcal{H}(\Omega) := \mathcal{H}_S(\Omega) \quad \hat{A} : \mathcal{H}(\Omega) \rightarrow \mathcal{A}\mathcal{H}(\Omega) := \mathcal{H}_A(\Omega)$$

Introduciamo adesso il concetto di **prodotto tensoriale** di spazi di Hilbert che sarà cruciale di seguito.

Consideriamo due spazi di Hilbert  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{K}$  e costruiamone il prodotto tensoriale algebrico  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$  come segue: consideriamo l'insieme prodotto

$$\mathcal{H}^* \times \mathcal{K}^* := \{\Phi : \mathcal{H}^* \times \mathcal{K}^* \rightarrow \mathbb{C} \mid \Phi \text{ è bilineare}\}$$

su di esso è possibile introdurre un prodotto scalare tale che la coppia

$$(\mathcal{H}^* \times \mathcal{K}^*, \langle \cdot, \cdot \rangle)$$

sia uno spazio prehilbertiano. Denotiamo allora lo spazio **prodotto tensore di spazi di Hilbert** come il completamento di  $\mathcal{H}^* \times \mathcal{K}^*$  rispetto al prodotto scalare introdotto e lo indicheremo come:  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ .

Siamo ora pronti a capire dove vive la funzione d'onda  $\Psi$ . La nozione di **prodotto tensoriale** tra spazi di Hilbert formalizza la nozione di indipendenza fra sistemi quantistici, cioè, in generale,  $\Psi \in \mathcal{H}^k(\Omega) \otimes \mathcal{H}^k(\Lambda)$  e si può dimostrare che:

$$\mathcal{H}^k(\Omega) \otimes \mathcal{H}^k(\Omega) \cong \mathcal{H}^k(\Omega \times \Omega)$$

Nel caso il sistema quantistico sia composto da fermioni o bosoni si hanno due situazioni. Applicando gli operatori di proiezione si ha:

- **fermioni:**  $\Psi \rightarrow \Psi_A \in \mathcal{A}(\mathcal{H}^k(\Omega) \otimes \mathcal{H}^k(\Omega))$
- **bosoni:**  $\Psi \rightarrow \Psi_S \in \mathcal{S}(\mathcal{H}^k(\Omega) \otimes \mathcal{H}^k(\Omega))$

## 5. Funzione d'onda di N particelle

Il tutto si può generalizzare per induzione molto facilmente ad un gas composto da un numero  $N \in \mathbb{N}$  di particelle.

In questo caso, nell'ipotesi di particelle indistinguibili si ha:

$$\Psi = \Psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = \prod_{i=1}^n \Psi_i(\vec{x}_i) \in \bigotimes_{j=1}^N \mathcal{H}^k(\Omega) \cong \mathcal{H}^k(\Omega^N) \quad (11)$$

La soluzione finale non è questa e cambia in base a se stiamo considerando 2 fermioni o 2 bosoni:

- **fermioni:** in questo caso si dimostra che per antisimmetrizzare la funzione d'onda (11) si deve calcolare il cosiddetto **determinante di Slater:**

$$\Psi_A(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \Psi_1(\mathbf{r}_1) & \Psi_2(\mathbf{r}_1) & \cdots & \Psi_n(\mathbf{r}_1) \\ \Psi_1(\mathbf{r}_2) & \Psi_2(\mathbf{r}_2) & \cdots & \Psi_n(\mathbf{r}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_1(\mathbf{r}_n) & \Psi_2(\mathbf{r}_n) & \cdots & \Psi_n(\mathbf{r}_n) \end{vmatrix}$$

- **bosoni:** in quest'altro caso si dimostra invece che per simmetrizzare la funzione d'onda (11) si deve calcolare il cosiddetto **permanente di Slater:**

$$\Psi_S(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\sigma \in S_N} \prod_{i=1}^n \Psi_i(\vec{x}_{\sigma_i})$$

dove  $\Psi_i(\vec{x}_j)$  è la funzione d'onda della particella  $i$ -esima valutata nella posizione  $\vec{x}_j \in \Omega$  e  $S_N$  è il gruppo simmetrico.

Come osservato nel paragrafo precedente, effettuare queste operazioni di simmetrizzazione e antisimmetrizzazione sulla funzione d'onda  $\Psi$  è equivalente a proiettare la funzione d'onda rispettivamente sui sottospazi simmetrici e antisimmetrici di  $\bigotimes_{j=1}^N \mathcal{H}^k(\Omega)$ , azione svolta dagli operatori  $\hat{\mathcal{S}}$  e  $\hat{\mathcal{A}}$ :

- **fermioni:**  $\Psi \rightarrow \Psi_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A} \left( \bigotimes_{j=1}^N \mathcal{H}^k(\Omega) \right)$
- **bosoni:**  $\Psi \rightarrow \Psi_{\mathcal{S}} \in \mathcal{S} \left( \bigotimes_{j=1}^N \mathcal{H}^k(\Omega) \right)$

## 6. Spazi di Fock

Se consideriamo un gas quantistico, esso conterrà un numero  $N$  di particelle che, in generale, è incognito (e potrebbe ammettere delle fluttuazioni causate da errori di misura) e ad esempio può variare se il sistema è aperto.

Per descrivere quindi questo sistema, quindi la sua funzione d'onda, è necessario introdurre un nuovo spazio funzionale che racchiuda tutti i possibili casi: 0 particelle, 1 particella, 2 particelle, ... ,  $N \rightarrow +\infty$  particelle se consideriamo ad esempio il limite termodinamico.

Lo spazio adatto ai nostri scopi deve essere quindi una **somma diretta** di tutti gli spazi precedentemente introdotti. Formalmente data  $\Psi$  funzione d'onda che descrive le proprietà del gas quantistico:

$$\Psi \in \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{S}_{\varepsilon} \bigotimes_{i=0}^N \mathcal{H}^k(\Omega)$$

dove:

$$\mathcal{S}_\varepsilon = \begin{cases} \mathcal{A}, & \text{se } \varepsilon = -1 \\ \mathcal{S}, & \text{se } \varepsilon = +1 \end{cases}$$

che è appunto chiamato **spazio di Fock** rispettivamente antisimmetrico o **fermionico** e simmetrico o **bosonico**.

Diamo comunque la seguente:

DEFINIZIONE. Sia  $\{\mathcal{H}_i\}_{i \in \mathcal{G}}$  una famiglia di spazi di Hilbert. La **somma diretta algebrica** denotata con:

$$\bigoplus_{i \in \mathcal{G}} \mathcal{H}_i \subset \prod_{i \in \mathcal{G}} \mathcal{H}_i$$

è un sottoinsieme del prodotto cartesiano degli  $\{\mathcal{H}_i\}_{i \in \mathcal{G}}$  equipaggiato con il prodotto interno:

$$\langle \{x_i\}, \{y_i\} \rangle := \sum_{i \in \mathcal{G}} \langle x_i, y_i \rangle_{\mathcal{H}_i}$$

Chiamiamo allora **somma diretta nel senso degli spazi di Hilbert** il completamento metrico della somma diretta algebrica:

$$\bigoplus_{i \in \mathcal{G}} \mathcal{H}_i := \left( \bigoplus_{i \in \mathcal{G}} \mathcal{H}_i \right)^{\text{cpl}}$$

Si possono dotare tali spazi vettoriali di un prodotto interno così da renderli completi.

Indichiamo  $\forall N \in \mathbb{N}$  il prodotto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{N_\varepsilon}$  di  $\mathcal{S}_\varepsilon \bigotimes_{i=0}^N \mathcal{H}^k(\Omega)$ .

Possiamo allora introdurre su  $\mathcal{F}_\varepsilon$  il prodotto interno:

$$\forall \Psi, \Phi \in \mathcal{F}_\varepsilon : \langle \Psi, \Phi \rangle_{\mathcal{F}_\varepsilon} := \sum_{N=1}^{\infty} \langle \Psi_{11}, \Psi_{12}, \dots, \Psi_{1N} | \Phi_{11}, \Phi_{12}, \dots, \Phi_{1N} \rangle_{N_\varepsilon}$$

che è equivalente a:

$$\langle \Psi, \Phi \rangle_{\mathcal{F}_\varepsilon} = \Psi_0^* \Phi_0 + \langle \Psi_{11}, \Psi_{12} | \Phi_{11}, \Phi_{12} \rangle_\varepsilon + \dots$$

Gli spazi  $(\mathcal{F}_\varepsilon, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{F}_\varepsilon})$  sono così spazi di Hilbert.

Grazie a questi spazi è possibile definire gli **operatori di creazione e annichilazione**. Definiamo solo l'operatore di creazione:

$$a_j^\dagger : \mathcal{F}_\varepsilon \rightarrow \mathcal{F}_\varepsilon$$

che, informalmente, crea una particella allo stato  $j$  aggiungendola al gas quantistico. Consideriamo allora un sistema con  $M$  livelli energetici e  $\forall i = 1, \dots, M$  è presente un numero  $n_i$  di particelle (chiamato numero di occupazione) tale che:

$$\sum_{i=1}^M n_i = N$$

Allora l'operatore di creazione agisce in questo modo:

$$\Psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = (a_1^\dagger)^{n_1} (a_2^\dagger)^{n_2} \dots (a_M^\dagger)^{n_M} |0\rangle$$

dove  $|0\rangle$  è lo **stato di vuoto**.



# A PROPOSITO DEL COEFFICIENTE BINOMIALE

MARCO DELLA PENNA

## 1. Il dilemma

Lo scopo di questo intervento è risolvere un problema di teoria analitica dei numeri proposto da Paul Erdos in una gara matematica ungherese. Il testo recita così: ci chiediamo se esista una costante  $C$  tale che  $\forall n \geq C^k$  valga  $\omega\left(\binom{n}{k}\right) \geq k$ , dove  $\omega(m) \doteq \#\{\text{primi distinti che dividono } m\}$ .

## 2. L'approccio

Osserviamo intensamente la formula del coefficiente binomiale

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot \dots \cdot (n - k + 1)}{k \cdot \dots \cdot 1}$$

e ricordiamoci che  $n$  è molto più grosso di  $k$ , è sensato immaginare dunque che ogni  $m \in \{n - k + 1, \dots, n\}$  sia diviso da qualche primo  $p_m > k$ . Se così fosse allora avremmo già finito! Infatti tutti i  $p_m$  sarebbero distinti (poichè  $m - m' < k < p_m$  e quindi  $p_m$  non può dividere  $m'$ ) e nessuno di questi si può semplificare con un termine al denominatore, avremmo dunque così trovato  $k$  primi distinti che dividono  $\binom{n}{k}$ . Ovviamente però non possiamo essere sempre così fortunati: si pensi al caso in cui  $n$  è una gigantesca potenza di 2...chiaramente  $n$  non è divisibile per primi grossi ma probabilmente  $n$  è così "tanto" divisibile per 2 che 2 dividerà anche  $\binom{n}{k}$ . La soluzione è in realtà tutta in queste righe, bisogna soltanto tradurla in formule con un po' d'astuzia.

## 3. La soluzione del dilemma

Sia  $v_p(m)$  la valutazione  $p$ -adica di  $m$ , ovvero l'esponente di  $p$  nella fattorizzazione in primi di  $m$ . Si noti allora che  $v_p(m!) = \sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{m}{p^j} \right\rfloor$ , dove  $\lfloor a \rfloor$  denota la parte intera di  $a$ . Si noti anche che vale la disuguaglianza  $\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor \leq \lfloor a + b \rfloor$  da cui deduciamo che

$$v_p\left(\binom{n}{k}\right) = v_p\left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right) = v_p(n!) - v_p(k!) - v_p((n-k)!) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \left[ \frac{n}{p^j} \right] - \left( \left[ \frac{k}{p^j} \right] + \left[ \frac{n-k}{p^j} \right] \right) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \left[ \frac{n}{p^j} \right] - \left[ \frac{n}{p^j} \right] = 0$$

dove la disuguaglianza è saturata se e solo se  $\forall j \geq 1 \left[ \frac{n}{p^j} \right] = \left[ \frac{k}{p^j} \right] + \left[ \frac{n-k}{p^j} \right]$ . Sia ora  $m \in \{n-k+1, \dots, n\}$ , vogliamo mostrare che esiste una certa potenza di un primo  $p^\lambda > k$  tale che  $p^\lambda$  divida  $m$ . Per farlo usiamo l'ipotesi  $n \geq C^k$  con  $C$  costante ancora da determinare. Se  $m$  è divisibile per un primo  $p > k$  allora abbiamo già concluso, supponiamo invece che ciò non valga e sia  $m = \prod p_i^{\lambda_i}$  la fattorizzazione in primi di  $m$ . Se per assurdo  $p_i^{\lambda_i} \leq k$  per ogni  $i$  allora si avrebbe che

$$k^{\frac{4k}{\log(k)}} \geq k^{\pi(k)} \geq m > n-k \geq C^k - k$$

dove  $\pi(k)$  denota il numero di primi minori o uguali a  $k$  e  $\pi(k) \leq \frac{4k}{\log(k)}$  è la stima di Chebyshev (si veda l'appendice). Dunque scegliendo  $C$  sufficientemente grande troviamo che

$$2k^{\frac{4k}{\log(k)}} \geq C^k \Rightarrow 1 + \frac{4k}{\log(C)} \geq k$$

che porta a un assurdo per esempio se  $C \geq e^5$ .

Abbiamo dunque mostrato che per ogni  $m \in \{n-k+1, \dots, n\}$  esiste  $p_m^{\lambda_m} > k$  che divide  $m$  e, inoltre,  $p_m \neq p_{m'}$  ogni volta che  $m \neq m'$  (l'argomento è analogo a quello già visto nell'approccio). Infine

$$m \in (n-k, n] \Rightarrow \left[ \frac{n}{p_m^{\lambda_m}} \right] > \left[ \frac{n-k}{p_m^{\lambda_m}} \right] \Rightarrow p_m \text{ divide } \binom{n}{k}$$

e concludiamo dunque che  $\omega\left(\binom{n}{k}\right) \geq k$ .

#### 4. Appendice

Anzitutto vogliamo spendere due parole sulla costante  $C$  che nel testo è stata scelta  $C \geq e^5$ , in realtà si può dimostrare che anche valori molto più bassi come  $C \approx 4.3$  vanno bene. Ciò che è più interessante è però il valore asintotico per  $C$  ovvero le costanti per cui, fatta eccezione per un numero finito di casi, vale la tesi. Con lo stesso ragionamento fatto nella dimostrazione ma utilizzando il teorema dei numeri primi ( $\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$ ) al posto della stima di Chebyshev si arriva a  $\frac{k}{\log(C)} \geq k - \epsilon$  e, dunque, asintoticamente tutte le costanti  $C > e$  vanno bene. Dimostrare che anche costanti più piccole possono funzionare potrebbe invece risultare molto più complicato. Per concludere dimostriamo la stima di Chebyshev, non lo facciamo solo per completezza, ma anche perchè la dimostrazione utilizza ancora il coefficiente binomiale! Si consideri infatti

$$\prod_{n < p \leq 2n} p \leq \binom{2n}{n} \leq \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = 4^n \Rightarrow$$

$$\log(n)(\pi(2n) - \pi(n)) \leq \sum_{n < p \leq 2n} \log(p) \leq n \log(4)$$



allora,

$$\pi(2^k) = \sum_{j=1}^k \pi(2^j) - \pi(2^{j-1}) \leq 1 + \sum_{j=2}^k \frac{2^j}{j-1} \leq 4 + 2 \int_2^k \frac{2^j}{j} dj \sim \frac{2^{k+1}}{\log(2^k)}$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato il teorema di De L'Hopital, infine stimando  $2^k \leq n < 2^{k+1}$  si ottiene la tesi cercata.

### Bibliografia

Contests in Higher Mathematics by Gabor J. Szekely, Springer Edition, (pag. 371)



Fuori Orario è una giornata di seminari *per studenti da studenti*, giunta quest'anno alla sua settima edizione, organizzata dai giovani del Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Milano. Nata per condividere specifici argomenti di notevole bellezza che non trovano spazio all'interno delle lezioni ordinarie, questa iniziativa permette a noi studenti di via Saldini di metterci in gioco. Siamo così stati in grado di condividere le nostre idee e confrontarci dal vivo con grande passione.

*Stampato con il contributo dell'Università derivante dai fondi previsti per le attività culturali e sociali.*