Il paradosso di Banach-Tarski

Marco Artusa

Indice

1 Equiscomponibilità e insiemi paradossali

Sia $(G, \cdot)$ un gruppo che agisce su un insieme X. Siano poi $A, B \subseteq X$.

Definizione 1. A e B si dicono *finitamente G-equiscomponibili* se esistono due partizioni $\{A_i\}_{i=1}^n$ e $\{B_i\}_{i=1}^n$ rispettivamente di A e di B e degli elementi $g_1, \ldots, g_n$ di G tali che $B_i = g_i A_i$ per ogni i=1,. . . ,n.

Definizione 2. A e B si dicono *numerabilmente G-equiscomponibili* se esistono due partizioni numerabili $\{A_n\}_{n\in N}$ e $\{B_n\}_{n\in N}$ rispettivamente di A e di B e un sottoinsieme numerabile di G $\{g_n\}_{n\in N}$ tale che $B_n = g_n A_n$ per ogni $n \in N$.

Definizione 3. A si dice *finitamente G-paradossale* se esistono due sottoinsiemi di A A_1 e A_2 tali che $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ e $A_1 \cup A_2 = A$ e A_1 e A_2 sono finitamente G-equiscomponibili con A.

Definizione 4. A si dice *numerabilmente G-paradossale* se esistono due sottoinsiemi di A A_1 e A_2 tali che $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ e $A_1 \cup A_2 = A$ e A_1 e A_2 sono numerabilmente G-equiscomponibili con A.

Osserviamo che le prime due definizioni forniscono due relazioni di equivalenza su $P(X)$. Per comodità indichiamo la relazione di *finita G-equiscomponibilità* con il simbolo $\overset{F}{\sim}$ e la relazione di *G-equiscomponibilità numerabile* con il simbolo $\overset{N}{\sim}$.

Esempio 1. Consideriamo il caso di $(\mathbb{R}, +)$ che agisce su sè stesso per traslazione. In tal caso si può facilmente verificare che $[0, 2] \overset{F}{\sim} [10, 11) \cup [21, 22]$ e $\mathbb{R} \overset{F}{\sim} (-\infty, -10] \cup (10, +\infty)$.

Esempio 2. Sia $(SO(2), \cdot)$ il gruppo delle rotazioni del piano con operazione associata. Supponendo che esso agisca sull'insieme S^1, è possibile (ma non immediato) mostrare che, qualsiasi sia il punto P di S^1, $S^1 \setminus \{P\}$ e S^1 sono finitamente $SO(2)$-equiscomponibili.

Dimostrazione. Lasciata al lettore. *(Suggerimento: sfruttare l'incommensurabilità fra la misura del raggio di S^1 e la misura di S^1 stesso)* $\square$

Esempio 3. Sia $(SO(2), \cdot)$ il gruppo delle rotazioni del piano con operazione associata. Supponendo che esso agisca sull'insieme $\bar{D}^1$ si può dimostrare che $\bar{D}^1 \setminus \{r\}$ e $\bar{D}^1$ sono finitamente $SO(2)$-equiscomponibili (dove r è un qualsiasi raggio di $\bar{D}^1$ privato del centro).

Dimostrazione. Sia P il punto di intersezione fra r e S^1: supponiamo, senza perdere di generalità, che P sia $(1,0)$. A questo punto utilizziamo una tecnica che prende il nome di *tecnica dell'albergo di Hilbert*: partendo da P costruiamo una successione di punti di S^1 (e conseguentemente una successione di raggi privati del centro) muovendoci di un opportuno angolo α tale che questa successione sia iniettiva.

Come possiamo scegliere α? Ad esempio scegliendo $\alpha = 1\ rad$ siamo sicuri che non può succedere che $n\alpha = m\alpha$, per via dell'incommensurabilità fra α e l'angolo giro 2π. Indichiamo poi con R_n l'n-esimo elemento di questa successione di raggi (si parte da $n = 1$, dunque r è escluso da questa successione.

Siamo ora pronti per individuare due sottoinsiemi di $\bar{D}^1 \setminus \{r\}$ su cui applicare la definizione di finita equiscomponibilità.

1. $R = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n$;
2. $S = (\bar{D}^1 \setminus \{r\}) \setminus R$.

Non è difficile rendersi conto che, se agiamo con α^{-1} su R, otteniamo $R \cup \{r\}$: infatti ogni R_n diventa R_{n-1}, mentre R_1 si trasforma in r.

Pertanto $\{\alpha^{-1}R, 1S\}$ è una partizione di $\bar{D}^1$, in quanto $\alpha^{-1}R \cup 1S = R \cup \{r\} \cup S = \bar{D}^1$. Dunque $\bar{D}^1 \setminus \{r\}$ e $\bar{D}^1$ sono finitamente $SO(2)$-equiscomponibili. $\square$

Esempio 4. Consideriamo ora il caso in cui un generico gruppo $(G, \cdot)$ agisca *transitivamente* su un insieme X. Allora:

- Ogni coppia di sottoinsiemi finiti A e B sono finitamente G-equiscomponibili se e solo se hanno la stessa cardinalità.
- Due sottoinsiemi infinito-numerabili A e B sono sempre numerabilmente G-equiscomponibili.
- Ogni sottoinsieme infinito-numerabile è numerabilmente G-paradossale.

Dimostrazione. Lasciata al lettore. $\square$

Osservazione 1. Sia $(G, \cdot)$ un gruppo e H un suo sottogruppo. Se X è finitamente H-paradossale, allora X è finitamente G-paradossale.

Dimostrazione. La dimostrazione è banale . $\square$

2 Equiscomponibilità in tre dimensioni e gruppi liberi

In $\mathbb{R}^3$ quello che succede è particolare: il gruppo delle rototraslazioni $SO(3) \ltimes \mathbb{R}^3$ *non* è abeliano e contiene un **gruppo libero** di due generatori[1] (più precisamente questo è contenuto in $SO(3)$). Ciò significa che esistono due rotazioni di $SO(3)$, che chiamo U e L (per *up* e *left*) tali che $H_s = \{$parole ridotte nell'alfabeto $U, L, U^{-1}, L^{-1}\}$ - con operazione *"accostamento e riduzione"*- può essere inteso come *gruppo libero* e *sottogruppo* di $SO(3)$.

L'esistenza di questo gruppo libero è essenziale per il paradosso di Banach-Tarski, ma la dimostrazione della sua esistenza non verrà trattata in questa presentazione.

Quello che segue è un importante risultato.

[1] Questo significa che esiste una mappa iniettiva f da $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ in $SO(3)$ tale che $f((1,0)) = U \in SO(3)$ e $f((0,1)) = L \in SO(3)$.

Lemma 1. *(Teorema di Banach-Schroeden-Bernstein) Sia F_2 un gruppo libero di due generatori. Se F_2 agisce su sè stesso nel modo più ovvio (per moltiplicazione a sinistra), allora F_2 è finitamente F_2-paradossale.*

Dimostrazione. Per la dimostrazione ci rifacciamo alla definizione 3. Cerchiamo dunque due sottoinsiemi A e B di F_2 tali che $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = F_2$. Abbiamo inoltre bisogno di $g_1, g_2 \in F_2$ tali che $g_1 A = F_2$ e $g_2 B = F_2$. Ricordiamo che F_2 è l'insieme delle parole ridotte nell'alfabeto U, L, U^{-1}, L^{-1} (*attenzione!* Queste parole ridotte si leggono al contrario, in quanto le lettere si 'accodano' a sinistra).
Indicando con W_U, W_L, $W_{U^{-1}}$, $W_{L^{-1}}$ gli insiemi delle parole ridotte che *finiscono* (ricordando che la lettera finale è quella più a sinistra) rispettivamente con U,L,U^{-1},L^{-1} si può trovare immediatamente una partizione di F_2. Infatti

$$F_2 = W_U \cup W_L \cup W_{U^{-1}} \cup W_{L^{-1}} \cup \{1\}$$

dove 1 è la *parola vuota*.

Cosa succede se si fa agire U^{-1} su W_U? Per capirlo proviamo a scrivere (*in modo del tutto informale!!*) W_U in questo modo:

$$W_U = \begin{cases} U, UU, UUU, UUUU, \dots \\ UL, ULL, ULLL, \dots \\ UL^{-1}, UL^{-1}L^{-1}, UL^{-1}L^{-1}L^{-1}, \dots \\ ULU, ULUU, ULUUU, \dots \end{cases}$$

Proviamo allora a scrivere, sempre utilizzando questo metodo informale, l'insieme $U^{-1}W_U$:

$$W_U = \begin{cases} U^{-1}U, U^{-1}UU, U^{-1}UUU, U^{-1}UUUU, \dots \\ U^{-1}UL, U^{-1}ULL, U^{-1}ULLL, \dots \\ U^{-1}UL^{-1}, U^{-1}UL^{-1}L^{-1}, U^{-1}UL^{-1}L^{-1}L^{-1}, \dots \\ U^{-1}ULU, U^{-1}ULUU, U^{-1}ULUUU, \dots \end{cases}$$

A questo punto, riducendo le parole, si può notare che

$$U^{-1}W_U = F_2 \setminus W_{U^{-1}} \tag{1}$$

Si mostra ora che

$$F_2 \overset{F}{\sim} W_U \cup W_{U^{-1}} \tag{2}$$

Si inizia affermando che, senza ombra di dubbio, $F_2 = W_{U^{-1}} \cup (F_2 \setminus W_{U^{-1}})$. Per poter verificare la definizione 1 scelgo come partizione di F_2 $\{W_{U^{-1}}, F_2 \setminus W_{U^{-1}}\}$ e come elementi del gruppo $1, U^{-1} \in F_2$.

$$W_{U^{-1}} = 1W_{U^{-1}}$$

$$F_2 \setminus W_{U^{-1}} = U^{-1}W_U \quad \text{(usando (1))}$$

In tal modo ho mostrato (2).

Dunque F_2 e il suo sottoinsieme proprio $W_U \cup W_{U^{-1}}$ sono finitamente G-equiscomponibili: F_2 è paradossale. □

Corollario 1. *Se F_2 agisce liberamente[2] su X, allora X è finitamente F_2-paradossale.*

[2]i.e. $gx \neq x \ \forall x \in X \ \forall g \in F_2$ t.c. $g \neq 1$

Dimostrazione. Utilizzo l'*assioma della scelta* per costruire un insieme Γ di rappresentanti delle orbite.

$$X = \bigcup_{x \in \Gamma} F_2 x \tag{3}$$

Il fatto che l'azione sia libera, però, ci dice anche che esiste una bijezione tra $F_2\bar{x}$ e F_2, qualsiasi sia $\bar{x} \in F_2$ (in modo informale si può dire che è possibile nominare *senza fraintendimenti ogni* elemento dell'orbita di $\bar{x}$ con l'*unico* elemento di F_2 che ho usato per raggiungerlo, partendo da $\bar{x}$). A questo punto, partendo dall'equazione (3) e procedendo su F_2 in modo analogo al Lemma 1 si giunge alla tesi. □

3 Il paradosso di Banach-Tarski

Dopo questi risultati preliminari siamo pronti per dimostrare il *paradosso di Banach-Tarski.*

Teorema 1 (paradosso di Banach-Tarski)**.** *Il disco unitario $\bar{D}^3$ è finitamente $SO(3) \ltimes \mathbb{R}^3$ paradossale.*

Prima di procedere con la dimostrazione di tale teorema, effettuiamo alcune osservazioni.

Osservazione 2. $SO(3) \ltimes \mathbb{R}^3$ è il gruppo delle *rototraslazioni* di $\mathbb{R}^3$ (che contiene, come abbiamo già affermato, F_2 e $SO(3)$ come sottogruppi).

Osservazione 3. è possibile riformulare questo teorema in diversi modi:

1. *Esistono due sottoinsiemi $A, B \subseteq SO(3) \ltimes \mathbb{R}^3$ t.c. $A \overset{F}{\sim} \bar{D}^3$ e $B \overset{F}{\sim} \bar{D}^3$.*

2. *Esistono $A_1, \ldots, A_n$ e $B_1, \ldots, B_m \subseteq \bar{D}^3$ tali che*
   - $a_1 A_1 = \bar{A}_1, \ldots, a_n A_n = \bar{A}_n$ *con* $\bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i = \bar{D}^3$ *per qualche* $a_1, \ldots, a_n \in SO(3) \ltimes \mathbb{R}^3$
   - $b_1 B_1 = \bar{B}_1, \ldots, b_n B_n = \bar{B}_m$ *con* $\bigcup_{i=1}^m \bar{B}_i = \bar{D}^3$ *per qualche* $b_1, \ldots, b_m \in SO(3) \ltimes \mathbb{R}^3$

3. *Esistono $A_1, \ldots, A_n$ e $B_1, \ldots, B_m \subseteq \bar{D}^3$ tali che*
   - *'riassemblando' $A_1, \ldots, A_n$ ottengo $\bar{D}^3$*
   - *'riassemblando' $B_1, \ldots, B_m$ ottengo $\bar{D}^3$*

Dimostrazione. In questa dimostrazione inizialmente ci si concentrerà sulla ricerca di una partizione della sola superficie sferica S^2 (*paradosso di Haussdorff*), per poi passare, attraverso questa, a una partizione di $\bar{D}^3$ che soddisfi la richiesta dell'osservazione 3. Per comodità dividiamo la dimostrazione del teorema in passi. Ricordiamo preliminarmente che, come abbiamo già osservato, $SO(3)$ contiene il sottogruppo libero F_2, di generatori U e L.

PASSO 1: Ricerca di un sottoinsieme $E \subseteq \bar{D}^3$ numerabile tale che F_2 agisce liberamente su $S^2 \setminus E$. Si utilizza a tal proposito il *teorema di Eulero*, il quale afferma che ogni rotazione di $SO(3)$ ha un asse di rotazione[3]: dunque ogni elemento $g \in F_2$ ha due *poli* di rotazione su S^2 (i punti di intersezione tra quest'asse e S^2), che indichiamo con P_g^1 e P_g^2. Possiamo a questo punto definire E nel modo seguente:

$$E = \{P_g^1, P_g^2\}_{g \in F_2}$$

Chiaramente E è numerabile, in quanto F_2 lo è, essendo gruppo libero con due generatori.

[3] i.e. una retta di punti fissi

Per completare la dimostrazione del passo 1 basta controllare che l'azione di F_2 su $S^2 \setminus E$ sia libera. Supponiamo per assurdo esista $x \in S^2 \setminus E$ t.c. $gx = x$ per qualche $g \in F_2 \setminus \{1\}$. Questo significa che x è polo per $g \in F_2$: ma allora x sta in E, il che è assurdo!

PASSO 2: Divisione di S^2 in 6 sottoinsiemi disgiunti. Avere reso l'azione libera su $S^2 \setminus E$ è utile per suddividere questo insieme in 5 sottoinsiemi: infatti so che

$$S^2 \setminus E = \bigcup_{x \in \Gamma} F_2 x. \tag{4}$$

Si tratta della solita partizione in orbite, in cui Γ rappresenta un sistema di rappresentanti per le orbite, che può anche essere pensato come l'insieme dei *'punti di partenza'*.

Come abbiamo già osservato nella dimostrazione del corollario 1, il fatto che l'azione di F_2 sia libera su $S^2 \setminus E$ ci garantisce che ogni orbita è in bijezione con F_2, i.e.: prendendo $\bar{x} \in \Gamma$ posso identificare *ogni* $P \in F_2\bar{x}$ con l'elemento di F_2 con cui ho agito su $\bar{x}$ per 'ottenere' P (chiamiamo $\varphi_{\bar{x}}$ la bijezione tra $F_2\bar{x}$ e F_2).

In base a ciò è possibile definire sottoinsiemi di $F_2\bar{x}$ in questo modo:

$$V_U^{\bar{x}} := \varphi_{\bar{x}}^{-1}(W_U),$$

dove W_U è definito nella dimostrazione del lemma 1.
In modo molto informale si può affermare che $V_U^{\bar{x}}$ è l'insieme dei punti dell'orbita di $\bar{x}$ del tipo $g\bar{x}$, dove g è un elemento di F_2 che ha come 'ultima rotazione' U (da intendersi come nel lemma 1). Analogamente definisco

$$V_L^{\bar{x}} := \varphi_{\bar{x}}^{-1}(W_L) \quad V_{U^{-1}}^{\bar{x}} := \varphi_{\bar{x}}^{-1}(W_{U^{-1}}) \quad V_{L^{-1}}^{\bar{x}} := \varphi_{\bar{x}}^{-1}(W_{L^{-1}}).$$

Siamo ora pronti per completare il passo 2 andando a definire i seguenti insiemi:

$$V_U := \bigcup_{\bar{x} \in \Gamma} V_U^{\bar{x}} \tag{5}$$

$$V_L := \bigcup_{\bar{x} \in \Gamma} V_L^{\bar{x}} \tag{6}$$

$$V_{U^{-1}} := \bigcup_{\bar{x} \in \Gamma} V_{U^{-1}}^{\bar{x}} \tag{7}$$

$$V_{L^{-1}} := \bigcup_{\bar{x} \in \Gamma} V_{L^{-1}}^{\bar{x}}. \tag{8}$$

Aggiungendo Γ a questi quattro insiemi abbiamo costruito una partizione di $S^2 \setminus E$ costituita da 5 elementi, e dunque

$$S^2 = V_U \cup V_L \cup V_{U^{-1}} \cup V_{L^{-1}} \cup \Gamma \cup E \tag{9}$$

PASSO 3: Divisione di $\bar{D}^3$ in 7 sottoinsiemi Il punto di partenza deve essere la partizione di S^2 della (9). Per giungere a una partizione di $\bar{D}^3$ bisogna fare questa osservazione: per ogni punto di S^2 è unico il segmento che lo congiunge al centro di $\bar{D}^3$. Ha senso allora definire S_P come il segmento che congiunge P a (0,0,0) (privato del centro stesso), per ogni $P \in S^2$.

Fatta questa precisazione, consideriamo i seguenti insiemi:

$$A_U := V_U \cup \bigcup_{P\in V_U} S_P \tag{10}$$

$$A_L := V_L \cup \bigcup_{P\in V_L} S_P \tag{11}$$

$$A_{U^{-1}} := V_{U^{-1}} \cup \bigcup_{P\in V_{U^{-1}}} S_P \tag{12}$$

$$A_{L^{-1}} := V_{L^{-1}} \cup \bigcup_{P\in V_{L^{-1}}} S_P \tag{13}$$

$$E^* := E \cup \bigcup_{P\in E} S_P \tag{14}$$

$$\Gamma^* := \Gamma \cup \bigcup_{P\in \Gamma} S_P. \tag{15}$$

Automaticamente, aggiungendo $C = \{(0,0,0)\}$, abbiamo una partizione di $\bar{D}^3$ costituita da *sette* elementi.

$$\bar{D}^3 = A_U \cup A_L \cup A_{U^{-1}} \cup A_{L^{-1}} \cup \Gamma^* \cup E^* \cup C \tag{16}$$

Il passo 3 di questa dimostrazione è concluso: ora si cercherà di mostrare che facendo agire opportuni elementi di $SO(3) \ltimes \mathbb{R}^3$ su *quattro* elementi di questa partizione ottengo una prima copia di $\bar{D}^3$ e, facendone agire altri sui restanti *tre*, ho una seconda copia di $\bar{D}^3$. Solo allora la dimostrazione sarà conclusa.

PASSO 4: Dimostrazione che $A_L \cup A_{L^{-1}} \cup E^* \cup C$ e $\bar{D}^3$ sono finitamente $SO(3)$-equiscomponibili. Rifacendoci alla definizione 1 ci basterebbe trovare $g \in SO(3)$ t.c. $\{gA_L, 1A_{L^{-1}}, 1E^*, 1C\}$ è una partizione di $\bar{D}^3$. Osserviamo allora cosa accade se facciamo agire la rotazione L^{-1} su A_L: in modo analogo alla dimostrazione del lemma 1 si può osservare che

$$L^{-1}A_L = \Gamma^* \cup A_L \cup A_U \cup A_{U^{-1}}$$

Questa osservazione ci permette di concludere il passo 4.

PASSO 5: Dimostrazione che $A_U \cup A_{U^{-1}} \cup \Gamma^*$ e $\bar{D}^3$ sono finitamente $SO(3)$-equiscomponibili. La "costruzione" della seconda copia della sfera è un po' meno immediata della prima. A tal proposito consideriamo,al variare di $x \in \Gamma$, l'insieme $\varphi_x^{-1}(\{U^n\}_{n\in\mathbb{N}})$, e, conseguentemente il seguente sottoinsieme di V_U:

$$V_U^* := \bigcup_{x\in\Gamma} \varphi_x^{-1}(\{U^n\}_{n\in\mathbb{N}}). \tag{17}$$

Non lasciamoci spaventare dalle notazioni: si tratta dell'insieme dei punti di S^2 che sono raggiunti a partire da un qualche $x \in \Gamma$, agendo su di esso con la sola rotazione U^n, per qualche $n \in \mathbb{N}$.

Automaticamente, come abbiamo fatto in precedenza per costruire una partizione di $\bar{D}^3$ a partire da una partizione di S^2, si definisce

$$A_U^* := V_U^* \cup \bigcup_{x\in V_U^*} S_P \tag{18}$$

Ho dunque aggiunto ai punti di V_U^* i segmenti che li congiungono al centro (escludendo (0,0,0)). Ora possiamo agire come nel passo precedente e come nella dimostrazione del lemma 1, facendo agire U^{-1} su $A_U \setminus A_U^*$. è possibile notare che

$$U^{-1}(A_U \setminus A_U^*) = (A_U \setminus A_U^*) \cup A_L \cup A_{L^{-1}}. \tag{19}$$

Si nota, a partire dalla (19) , che $\{U^{-1}(A_U \setminus A_U^*), 1(A_{U^{-1}} \cup A_U^*), 1\Gamma^*\}$ è una partizione di $\bar{D}^3 \setminus (E^* \cup C)$. Pertanto usando la definizione 1

$$A_U \cup A_U^{-1} \cup \Gamma^* \overset{F}{\sim} \bar{D}^3 \setminus (E^* \cup C) \tag{20}$$

Dalla (20) cerchiamo di utilizzare la transitività di $\overset{F}{\sim}$ per giungere a

$$A_U \cup A_U^{-1} \cup \Gamma^* \overset{F}{\sim} \bar{D}^3, \tag{21}$$

che concluderebbe la dimostrazione del teorema.

Innanzitutto osserviamo che E è numerabile, dunque si può dimostrare che esiste una rotazione avente come asse una retta r rispetto alla quale gli elementi di E si trovano tutti ad altezza diversa. Tracciamo per ogni $P \in E$ la circonferenza intersezione tra S^2 e il piano ortogonale a r passante per P.
Utilizzando questa costruzione in $\bar{D}^3 \setminus (E^* \cup C)$ ci troviamo di fronte a un unione di circonferenze distinte, una quantità numerabile delle quali è privata di un raggio r_n.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ ci troviamo in una situazione analoga a quella dell'esempio 3: usiamo la stessa tecnica dimostrativa e, grazie ad un opportuna rotazione $\alpha \in SO(3)$, avente come asse r, si mostra che

$$\bar{D}^3 \setminus (E^* \cup C) \overset{F}{\sim} \bar{D}^3 \setminus C. \tag{22}$$

Ora l'ultima cosa che manca è il centro$(0, 0, 0)$. Possiamo, infatti, tracciare una circonferenza passante per $(0, 0, 0)$ e interamente contenuta in $\bar{D}^3$.
Utilizzando una tale costruzione in $\bar{D}^3 \setminus C$ otteniamo, all'interno di tale insieme, una circonferenza privata di un punto. Si tratta di una situazione analoga a quella dell'esempio 2 e, perciò, analogamente a quell'esempio, esiste una rotazione di $SO(3) \ltimes R^3$ che permette di "riempire" tale buco.

Possiamo infine affermare che

$$\bar{D}^3 \setminus C \overset{F}{\sim} \bar{D}^3. \tag{23}$$

Dalle equazioni (20), (22), (23) e dalla transitività di $\overset{F}{\sim}$ si giunge finalmente alla (21). La dimostrazione è conclusa

$\square$